CORREZIONE ESAME 18/6/2013 - ANALISI 2 BIO

1) $$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(1+\cos(xy)\right)}$$

a- Dom f ?

Deve essere $\cdot\ x^2+y^2>0 \implies (x,y)\neq(0,0)$

$\cdot\ 1+\cos xy \neq 0 \implies \cos xy \neq -1$

cioè $xy \neq \pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\implies y \neq \frac{(2k+1)\pi}{x}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Quindi $$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)=(0,0) \text{ oppure } y=\frac{(2k+1)\pi}{x},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

[FILA B: $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=(0,0) \text{ oppure } y=\frac{(2k-\frac{1}{2})\pi}{x},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$]

[FILA C: $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=(0,0) \text{ oppure } y=\frac{(3/4+k)\pi}{x},\ k\in\mathbb{Z} \text{ oppure } y=\frac{(1/2+k)\pi}{x},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$]

b- Devo calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Passando a coordinate polari, si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}\rho}^{\to 1 \text{ per } \rho\to 0}}{\rho\left(1+\underbrace{\cos(\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}\right)}$$

$|\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta| < \underset{\text{per } \rho\to 0}{\rho^2 \to 0}$ perciò $\cos(\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\to 1$ per $\rho\to 0$, unif. in θ

perciò $$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2} \quad (\text{uniforme in } \theta)$$

Quindi f è prolungabile a $(0,0)$ per continuità, ponendo $f(0,0) = 1/2$.

[FILA B: si ha $f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\theta) = \dfrac{\mathrm{sen}\rho}{\rho(1+\mathrm{sen}(\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta))} \to 1$ per $\rho \to 0$,

quindi f è prolungabile ponendo $f(0,0) = 1$].

[FILA C: poiché $\tan(xy) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, $f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\theta) \to 1$ per $\rho \to 0$ $\Rightarrow f(0,0) = 1$]

C - Calcolo $\nabla f(0,0)$ con la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\mathrm{sen}\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}\cdot 2} - \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\mathrm{sen}|t|}{2|t|} - \frac{1}{2}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen}t - t}{2t^2}$$

$t>0$: $\dfrac{\mathrm{sen}|t|}{|t|} = \dfrac{\mathrm{sen}t}{t}$

$t<0$: $\dfrac{\mathrm{sen}|t|}{|t|} = \dfrac{\mathrm{sen}(-t)}{-t} = \dfrac{-\mathrm{sen}t}{-t} = \dfrac{\mathrm{sen}t}{t}$

Uso de l'Hopital:

ancora de l'Hopital

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen}t - t}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{4t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\mathrm{sen}t}{4} = 0.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \ldots$ stesso conto poiché x e y sono "intercambiabili" nell'espressione di $f(x,y)$

$= 0$.

Perciò $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

[FILA B: perfettamente analogo, osservando che anche calcolato

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\mathrm{sen}t}{t} - 1\right]$$]

[FILA C: idem]

d- La circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1 ha equazione (3)

$x^2+y^2=1$, perciò $f|_{\mathcal{C}}$ è data da

$$f(x,y)\Big|_{\mathcal{C}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1\cdot(1+\cos(xy))}$$. Poiché $\operatorname{sen} 1 > 0$, $1+\cos xy \geq 0$,

tale funzione è minima se $\cos xy$ è massimo (poiché ciò implica che il denominatore è massimo). Ciò significa $f|_{\mathcal{C}}$ minima se quindi sto dividendo per un numero "grande".]

$\boxed{\cos xy = 1}$ $\Rightarrow$ tale condizione è verificata, per esempio, nel punto $P(1,0) \in \mathcal{C}$ (in corrispondenza di tale punto; in effetti, $f(1,0)=\frac{\operatorname{sen}1}{2}$)

(e di conseguenza $f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}1}{2}$)

VALORE MINIMO di $f|_{\mathcal{C}}$!

[FILA B: analogo, valore massimo sen1 raggiunto per esempio in $P(1,0)$, poiché in tale punto $\operatorname{sen}xy=0$ è minimo, essendo (x,y) appartenente a una regione di piano per cui $\operatorname{sen}xy \geq 0$]

[FILA C: analogo, valore massimo sen1 raggiunto per es. in $P(1,0)$, poiché $\tan xy \geq 0$ $\forall (x,y) \in$ al quarto di circonferenza e $\tan xy$ è minima (ovvero $=0$) in P]

2)
$$\begin{cases} y'' + 2y' = xe^x + \cos 2x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

[FILA B: $C_1+C_2e^{-4x}$, FILA C: $C_1+C_2e^{-x}$]

(1) EQ. OMOGENEA

$$\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-2$$

Integrale generale dell'eq. omogenea: $C_1+C_2e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

② Uso il metodo di sovrapposizione

- $y'' + 2y' = xe^x$

SOMIGLIANZA: $xe^x \overset{\text{DEVE}}{=} e^{px}\left(\cos(qx)\cdot h(x) + \operatorname{sen}(qx)\cdot k(x)\right)$

$\Rightarrow \quad p=1, \; q=0, \; h(x)=x, \; k(x)=0$

deg = max(deg h, deg k)

Cerco soluzioni della forma $\bar{y}(x) = x^m e^{px}\left(h^*(x)\cos qx + k^*(x)\operatorname{sen} qx\right)$, ove $m =$ molteplicità di $p \pm iq$ come radice del polinomio caratteristico

$p \pm iq = 1 \pm 0i = 1$ che non è radice $\Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow$ Cerco $\bar{y}(x) = x^0 e^x\left((Ax+B)\cos 0x + (Cx+D)\operatorname{sen} 0x\right) = e^x(Ax+B)$

$$\bar{y}'(x) = e^x(Ax+B) + Ae^x$$
$$\bar{y}''(x) = e^x(Ax+B) + Ae^x + Ae^x$$

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' = e^x(Ax+B) + 2Ae^x + 2e^x(Ax+B) + 2Ae^x \overset{\text{DEVE}}{=} xe^x$$

$$\Rightarrow \quad xe^x(A+2A) + e^x(B+2A+2B+2A) \overset{\text{DEVE}}{=} xe^x$$

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B + 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ 3B + 4/3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -4/9 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^x.$$

[FILA B: $A = 1/5$, $B = -6/25$]

[FILA C: $A = 1$, $B = -3/2$]

- $\bar{y}'' + 2y' = \cos 2x$

SOMIGLIANZA: qui $p = 0$, $q = 2$, $h(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 0$

$p \pm iq = 0 \pm 2i$ non è soluzione dell'eqz. caratteristica

$\Rightarrow m = 0$

Perciò cerco $\bar{\bar{y}}(x) = x^0 e^{0x}\left(A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x\right) = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x$.

$\bar{\bar{y}}'(x) = -2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x$

$\bar{\bar{y}}''(x) = -4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x$

$$\bar{\bar{y}}'' + 2\bar{\bar{y}}' = -4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x - 4A\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x \overset{\text{DEVE}}{=} \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A + 4B = 1 \\ -4B - 4A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ 8B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,2x.$$

[FILA B: $A = -1/10$, $B = -1/20$]
[FILA C: $A = -2/5$, $B = 1/5$]

□ Integrale generale dell'eq. assegnata:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{8}\cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

B: $C_1 + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)e^x - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\,\text{sen}\,2x$

C: $C_1 + C_2 e^{-x} + \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x - \frac{2}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,2x$

Impongo • $y(0) = 1$

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{8} \overset{\text{DEVE}}{=} 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{113}{72}$$

• $y'(0) = 0$

Si ha
$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x$$

da cui

$$y'(0) = -2C_2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{72}$$

Segue $C_1 = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$, per cui

[FILA B: $C_1 = \frac{5}{8}$, $C_2 = -\frac{57}{200}$]
[FILA C: $C_1 = 2$, $C_2 = \frac{1}{10}$]

RISPOSTA ALL'ESERCIZIO:

La sol. del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3}{2} + \frac{5}{72} e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right) e^{x} + \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8} \cos 2x .$$

3) $$\underline{F}(x,y,z) = \left(-\frac{e^{y} \operatorname{arctan} z}{x^2}, \frac{e^{y} \operatorname{arctan} z}{x}, \frac{e^{y}}{x(1+z^2)} \right)$$

d -

Per prima cosa, osservo che

$D := \operatorname{dom} \underline{F} = x \neq 0 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq 0 \}$ ovvero $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,y,z)\}_{y,z \in \mathbb{R}}$

Tale dominio NON è semplicemente connesso (è $\mathbb{R}^3$ meno un piano).

- Controlliamo prima se $\underline{F}$ è irrotazionale (se non lo è, non potrà essere conservativo)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -\frac{e^{y} \operatorname{arctan} z}{x^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{e^{y} \operatorname{arctan} z}{x^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= -\frac{e^{y}}{x^2(1+z^2)} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{e^{y}}{x^2(1+z^2)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{e^{y}}{x(1+z^2)} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{e^{y}}{x(1+z^2)} \end{aligned}\right\} \quad \underline{F} \text{ è irrotazionale}$$

- Non essendo D sempl. connesso, non possiamo concludere che $\underline{F}$ è conservativo. Perciò cerchiamo "a mano" un potenziale

$$\int F_2\,dy = \underbrace{\frac{e^y \arctan z}{x} + h(x,z)}_{=:U_1(x,y,z) \text{ candidato}}$$

Confronto $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ e F_1

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\cancel{\frac{e^y \arctan z}{x^2}} + \frac{\partial h(x,z)}{\partial x} \overset{\text{DEVE}}{=} -\cancel{\frac{e^y \arctan z}{x^2}}$$

$\Rightarrow \frac{\partial h(x,z)}{\partial x} = 0$ ovvero $h(x,z) = g(z)$ per una certa funzione g

$\Rightarrow U_2(x,y,z) := \frac{e^y \arctan z}{x} + g(z)$

Confronto $\frac{\partial U_2}{\partial z}$ e F_3

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = \cancel{\frac{e^y}{x(1+z^2)}} + g'(z) \overset{\text{DEVE}}{=} \cancel{\frac{e^y}{x(1+z^2)}}$$

$\Rightarrow g'(z) = 0$ ovvero $g(z) = k \in \mathbb{R}$.

Quindi $U(x,y,z) = \frac{e^y \arctan z}{x} + k$, $k \in \mathbb{R}$ è un buon potenziale per $\underline{F}$, e $\underline{F}$ è conservativo.

Attenzione, però: siccome D non è semplicemente connesso, $U \in C^1(D)$ anche se "salta" lungo il piano $\{x=0\}$, perciò la famiglia trovata non esaurisce tutti i potenziali per $\underline{F}$. Infatti la costante può variare al variare della componente semplicemente connessa di D che consideriamo.

La famiglia di potenziali per U è cioè

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \frac{e^y \arctan z}{x} + k_1, & x>0 \\ \frac{e^y \arctan z}{x} + k_2, & x<0 \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

[FILA B: $U(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{e^z \arctan x}{y} + k_1, & y>0 \\ \dfrac{e^z \arctan x}{y} + k_2, & y<0 \end{cases}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$]

[FILA C: $U(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{4e^x \arctan y}{z} + k_1, & z>0 \\ \dfrac{4e^x \arctan y}{z} + k_2, & z<0 \end{cases}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$]

b-

γ: $\varphi(t) = (t, a\log 2t, \sqrt{t+1} + \sqrt{t} - \sqrt{2})$, $t \in [1,2]$, $a \in \mathbb{R}$

osserviamo che γ giace tutta nella componente semplicemente connessa $\{x>0\}$ di D (altrimenti il lavoro potrebbe non essere definito), scegliamo il potenziale $U(x,y,z) = \dfrac{e^y \arctan z}{x}$ $(x>0)$ e ricordiamo che il lavoro dipende solo dagli estremi iniziali e finali della curva (poiché F è conservativo).

Si ha

$\varphi(1) = (1, a\log 2, 1)$

$\varphi(2) = (2, a\log 4, \sqrt{3})$

[FILA B: $(1, 3, a\log 2)$ e $(\sqrt{3}, 6, a\log 4)$]

[FILA C: $(a\log 2, 1, 2)$ e $(a\log 4, \sqrt{3}, 4)$]

Quindi $\displaystyle\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{\varphi} = U(\varphi(2)) - U(\varphi(1)) = \frac{e^{a\log 4} \arctan\sqrt{3}}{2} - \frac{e^{a\log 2} \arctan 1}{1} =$

PROP. LOGARITMI

$\downarrow$

$= \dfrac{e^{\log 4^a} \cdot \frac{\pi}{3}}{2} - \dfrac{e^{\log 2^a} \cdot \frac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{\pi}{6} \cdot 4^a - \dfrac{\pi}{4} \cdot 2^a$

Dovendo essere

$$\frac{\pi}{6}\cdot 4^a - \frac{\pi}{4}\cdot 2^a = \frac{\pi}{6}, \text{ si ha } \frac{\pi}{6}(2^2)^a - \frac{\pi}{4}2^a - \frac{\pi}{6} = 0,$$

ovvero, posto $2^a = w$, dividendo per π e facendo il m.c.d.,

$$2w^2 - 3w - 2 = 0 \Rightarrow w = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \text{ n.a. poiché } w = 2^a > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow w = 2$ cioè $2^a = 2$ cioè $\boxed{a = 1}$.

[FILA B: si ha $\frac{\pi}{18}\cdot 4^a - \frac{\pi}{12}\cdot 2^a = \frac{5}{9}\pi$, da cui $w = 4$ e $\boxed{a = 2}$]

[FILA C: si ha $\frac{\pi}{3}\cdot 4^a - \frac{\pi}{2}\cdot 2^a = \frac{52}{3}\pi$, da cui $w = 8$ e $\boxed{a = 3}$].

4)

a - γ: $\varphi(t) = (\log t, \log t^2 + 1, 0)$, $t \in [1, e]$

- REGOLARE

Le componenti sono $C^1([1,e])$

Si ha

$$\varphi'(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{2}{t}, 0\right)$$

che non si annulla mai per $t \in [1, e]$ (per es. $\frac{1}{t} \neq 0 \ \forall t$ poiché ha numeratore positivo)

$\Rightarrow \gamma$ è regolare

- SEMPLICE

La curva è semplice poiché, per esempio, $\log t$ è strettamente monotono nel suo dominio di definizione: si ha perciò

$$\log t_1 = \log t_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2$$
$$(t_1, t_2 \in [1, e])$$

→ ciò basta per affermare che γ è semplice.

• CHIUSA

Si ha
$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (\log 1, \log 1 + 1, 0) = (0,1,0) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ \varphi(e) &= (\log e, \log e + 1, 0) = (1,2,0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{ non è chiusa}$$

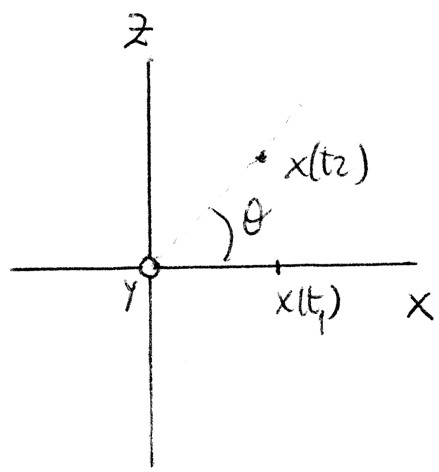
• RETTIFICABILE

La curva γ è certamente rettificabile per il teorema di rettificabilità delle curve C^1, essendo la parametrizzazione φ di classe C^1 su $[1, e]$. La lunghezza di γ è data da

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_1^e \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^2}} \, dt \underset{(t>0)}{=} \sqrt{5} \log t \Big|_1^e = \sqrt{5}.$$

[FILA B: $\mathcal{L}(\gamma) = \sqrt{8}$] [FILA C: $\mathcal{L}(\gamma) = 3$]

b-



Immagino l'asse y (attorno a cui ruoto) come uscente dal foglio

γ giace nel piano xy, quindi nel disegno sarà visibile la sola componente $x(t)$, che viene fatta ruotare descrivendo l'angolo

θ in figura. Perciò si ha che la superficie in questione è parametrizzata da

$$\begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = y(t) \\ z = x(t)\,\text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad t \in [1,e],\ \theta \in [0,2\pi]$$

si poteva applicare la formula (senza il ragionamento)

(superficie di rotazione).

Per l'espressione esplicita di γ, si ha cioè

$$S: \quad r(t,\theta) = \begin{cases} x = \log t \cos\theta \\ y = \log t^2 + 1 \\ z = \log t\ \text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad t \in [1,e],\ \theta \in [0,2\pi]$$

Ricordando che $\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| dt\,d\theta$,

con $D = [1,e] \times [0,2\pi]$, abbiamo

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \left(\frac{1}{t}\cos\theta,\ \frac{2}{t},\ \frac{1}{t}\,\text{sen}\,\theta \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(-\log t\,\text{sen}\,\theta,\ 0,\ \log t \cos\theta \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(\frac{2\log t}{t}\cos\theta,\ -\frac{\log t}{t},\ \frac{2\log t}{t}\,\text{sen}\,\theta \right)$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{\frac{4\log^2 t}{t^2} + \frac{\log^2 t}{t^2}} = \sqrt{5}\,\frac{\log t}{t}$$

(omettendo i moduli poiché $\log t \geq 0$, $t \geq 0$ per $t \in [1,e]$)

Quindi $\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e \frac{\sqrt{5}\log t}{t}\,dt = 2\pi\sqrt{5}\,\frac{\log^2 t}{2}\Big|_1^e = \sqrt{5}\,\pi.$

In alternativa, si poteva utilizzare il teorema di Guldino:

$$A(S) = 2\pi \int_1^e \log t \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^2}}\, dt .$$

[FILA B: $A(S) = 4\pi\sqrt{2}$]

[FILA C: $A(S) = 3\pi$]

5)

$$\iiint_E y \cos(x+z)\, dx\, dy\, dz$$

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; x+z \leq \frac{\pi}{2}, \; y \leq \sqrt{x} \right\}$$

Senza disegnare E (sarebbe complicato), osserviamo le disuguaglianze che lo definiscono.

$y \leq \sqrt{x}$ dice che $\boxed{x \geq 0}$ (poiché x è sotto radice)

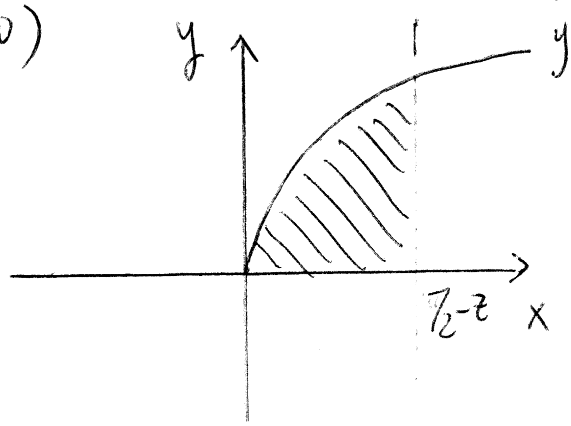
Quindi $x \leq \frac{\pi}{2} - z$ dice che $\boxed{\frac{\pi}{2} - z \geq 0}$ (visto che $x \geq 0$)

cioè $z \leq \frac{\pi}{2}$

Quindi $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - z$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ è una buona decomposizione del dominio che ci permette di calcolare l'integrale iterando nell'ordine le integrazioni in dy, dx, dz.

D'altra parte, immaginiamo di voler integrare per STRATI paralleli a xy (cioè a z fissato)

(z fissato)

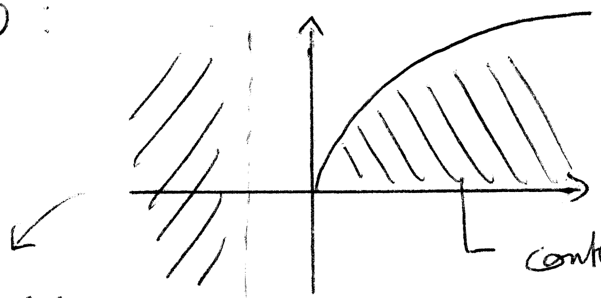


- $y \geq 0$
- $y \leq \sqrt{x}$ $(\Rightarrow x \geq 0)$
- $x \leq \frac{\pi}{2} - z$, siccome z è fissato, significa x a sinistra di un certo valore

$\Rightarrow$ il dominio è quello tratteggiato.

Resta da controllare dove varia z. Sappiamo $\boxed{z \geq 0}$

Se $z > \frac{\pi}{2}$, allora $\frac{\pi}{2} - z < 0$ ma allora sono fuori dal mio dominio, perché $x \geq 0$:



dovrei essere qui

$\frac{\pi}{2} - z$

contemporaneamente dovrei essere qui $\rightarrow$ impossibile!

$\Rightarrow$ dovrà essere $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.

Tornando all'integrale, avremo

$$\iiint_E y\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2-z}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)\,dy\right)dx\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2-z} x\cos(x+z)\,dx\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[x\,\mathrm{sen}(x+z)\Big|_0^{\pi/2-z} + \cos(x+z)\Big|_0^{\pi/2-z}\right]dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - z - \cos z\right)dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - \mathrm{sen}\,z\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Volume di E:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2 - z}\sqrt{x}\,dx\,dz = \int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}\left(\pi/2 - z\right)^{3/2} dz = -\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} -1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-z\right)^{3/2}dz =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\pi/2} = +\frac{4}{15}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} = \frac{4}{15}\sqrt{\frac{\pi^5}{2^4\cdot 2}} = \frac{\pi^2}{15}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$