Correzione prova scritta di ANALISI 2 BIO - 01/07/13

1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sqrt[3]{x^5 y} + x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.

- Passando a coordinate polari, $(x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{\rho^3 \cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \sqrt[3]{\rho^6(\cos^5\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)} + \rho^3\cos^3\theta}{\rho^2}$$

$$= \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\rho^2\sqrt[3]{\cos^5\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}}{\rho^2} + \rho\cos^3\theta$$

$$= \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \sqrt[3]{\cos^5\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} + \rho\cos^3\theta$$

se f fosse continua in $(0,0)$, si avrebbe $|f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \underbrace{- 0}_{0 = f(0,0)}| = |f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)| \to 0$ per $\rho \to 0^+$, indipendentemente da θ (condizione necessaria).

Tuttavia $f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \underbrace{\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt[3]{\cos^5\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}}_{\not\to 0\,!} + \underbrace{\rho\cos^3\theta}_{\to 0}$ per $\rho \to 0^+$!

(il limite dipende da θ!)

$\Rightarrow$ f <u>non</u> è continua in $(0,0)$.

(D'altra parte, ciò si vede bene anche sulle rette: per es., sulla retta $y = x$ si ha $f(x,x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{2x^2} \to \dfrac{1}{2}$ per $x \to 0$,

sulla retta $y = 2x$ si ha $f(x, 2x) = \dfrac{5x^3 + \sqrt[3]{2x^6}}{5x^2} \to \dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$ per $x \to 0$). $\neq$

- Poiché $f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$, non è neppure differenziabile in $(0,0)$.

- Poiché f è definita a tratti, analizziamo l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$ mediante la definizione.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \underset{\substack{\text{interessa}\\ t\neq 0!}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\frac{0+\sqrt[3]{t^5\cdot 0+t^3}}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\frac{0+\sqrt[3]{0\cdot t+0}}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = 0.$$

Si ha che f è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

[FILA B: $\nabla f(0,0) = (0,1)$]

2) $\underbrace{y' - 6y}_{A_0(x)} = \underbrace{4\cos x\, e^{5x}}_{b(x)}$: scrivere l'integrale generale

- Per la formula sulle equazioni (lineari) del I ordine, si ha

$$y(x) = e^{-\int A_0(x)dx}\left[\int b(x)\, e^{\int A_0(x)dx}\, dx + c\right]$$

Confrontando con il testo dato, si ha $A_0(x) = -6$, $b(x) = 4\cos x\, e^{5x}$, cosicché ($c\in\mathbb{R}$)

$$y(x) = e^{6x}\left[\int 4\cos x\, e^{5x} e^{-6x}\, dx + c\right] =$$

$$= e^{6x}\left[\int 4\cos x\, e^{-x}\, dx + c\right] =$$

$$= e^{6x}\left[2e^{-x}(\operatorname{sen}x - \cos x) + c\right] =$$

$$= 2e^{5x}(\operatorname{sen}x - \cos x) + ce^{6x},\ c\in\mathbb{R}.$$

$$\left[\int \cos x\, e^{-x}dx \overset{\text{PARTI}}{=} -\cos x\, e^{-x} - \int e^{-x}\operatorname{sen}x \overset{\text{PARTI}}{=} \ldots = \frac{1}{2}e^{-x}[\operatorname{sen}x - \cos x]\right]$$

[FILA B: $-2e^{5x}(\operatorname{sen}x + \cos x) + ce^{6x}$]

- Non vi sono soluzioni limitate dell'equazione dell'enunciato, (3)

① se $c \neq 0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$ ("vince" l'esponenziale di ordine massimo)

② se $c = 0$, $y(x) = 2e^{5x}(\operatorname{sen} x - \cos x)$.
se $y(x)$ fosse limitata, $\exists M$ t.c. $|y(x)| \leq M \quad \forall x$. (✱)
Tuttavia, fissata una qualunque costante $M > 0$, $\exists x_0$ tale che, $\forall \bar{x} \geq x_0$, $2e^{5\bar{x}} \geq M+1$. Scelto inoltre $\hat{x} \geq x_0$ tale che $\hat{x} = r\pi$, $r \in \mathbb{N}$, si ha $\operatorname{sen}\hat{x} = 0$, $\cos\hat{x} = -1$.
Segue che $y(\hat{x}) = 2e^{5\hat{x}}(\operatorname{sen}\hat{x} - \cos\hat{x}) = 2e^{5\hat{x}}(0-(-1)) = 2e^{5\hat{x}} \geq M+1$ (poiché $\hat{x} \geq x_0$)
contro l'ipotesi (✱).

3) γ: $\varphi(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2}, t, \cos\frac{t}{2}\right)$, $t \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

a- Dire se la curva è regolare e possiede punti su uno dei piani coordinati. γ è semplice?

• Riscrivendo $\varphi(t) = \left(\frac{t-3}{t^2}, t, \cos\frac{t}{2}\right)$, si ha che le componenti di φ sono $C^1\left(\left[1, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Inoltre
$$\varphi'(t) = (\dots, 1, \dots), \text{ quindi } \varphi'(t) \neq (0,0,0) \ \forall t \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

Segue che $\varphi(t)$ è regolare. φ è semplice perché la seconda componente è iniettiva.

Se $P_0 = \varphi(t_0)$ appartiene ad un piano coordinato, significa che almeno una sua componente è nulla; analizziamo perciò separatamente quando si verifica tale eventualità.

① $x(t) = 0 \Rightarrow \frac{t-3}{t^2} = 0$ si verifica per $t = 3 > \frac{\pi}{2}$, ovvero in un istante ESTERNO all'intervallo di parametrizzazione $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi(t)$ non ha punti sul piano Oyz.

② $y(t)=0 \Rightarrow t=0<1$ ovvero in un istante ESTERNO all'intervallo di parametrizzazione $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi(t)$ non ha punti sul piano Oxz.

③ $z(t)=0 \Rightarrow \cos\frac{t}{2}=0 \Rightarrow t=\pi, 3\pi, 5\pi, \dots \quad (t>0)$

$t=-\pi, -3\pi, \dots \quad (t<0)$

ovvero $t=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Tutti questi istanti sono esterni all'intervallo di parametrizzazione $([1,\frac{\pi}{2}])$

$\Rightarrow$ $\varphi(t)$ non ha punti sul piano Oxy.

$\Rightarrow^{\gamma}$ non ha punti su alcun piano coordinato.

b- $F(x,y,z)=\left(2xy-\frac{1}{x},\ x^2+3z,\ 3y\right)$

- Il dominio di $\underline{F}$ è $\operatorname{dom}\underline{F}=\{x\neq 0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x\neq 0\}$, che <u>non</u> è semplicemente connesso.
- Si ha inoltre che $\underline{F}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=2x=\frac{\partial f_2}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=0=\frac{\partial f_3}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=3=\frac{\partial f_3}{\partial y}$$

Siccome il dominio è composto da due componenti semplicemente connesse, $\underline{F}$ sarà conservativo su ciascuna di esse. Vediamo se lo è globalmente.
Per determinare un potenziale per $\underline{F}$, procediamo come al solito:

① $\int\left(2xy-\frac{1}{x}\right)dx = x^2y-\log|x|+g(y,z) =: U_1(x,y,z)$ (1° candidato)

② Confronto $\frac{\partial U_1}{\partial y}$ e f_2: $\quad \frac{\partial U_1}{\partial y}=x^2+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}$ DEVE $= x^2+3z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=3z \Rightarrow g(y,z)=3yz+h(z)$

Perciò $U_2(x,y,z) := x^2y - \log|x| + 3yz + h(z)$ (2° candidato) (5)

(3) Confronto $\frac{\partial U_2}{\partial z}$ e f_3: $\frac{\partial U_2}{\partial z} = 3y + h'(z) \underset{\text{DEVE}}{=} 3y \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) \equiv k \in \mathbb{R}$.

Al solito, poiché dom $\underline{F}$ non è semplicemente connesso ma è costituito da due componenti separate semplicemente connesse, un potenziale $C^1(\text{dom}\,\underline{F})$ può "saltare" lungo la superficie di separazione, cioè

$$U(x,y,z) = \begin{cases} x^2y - \log|x| + 3yz + k_1 & , \ x>0 \\ x^2y - \log|x| + 3yz + k_2 & , \ x<0 \end{cases}$$

è la famiglia di potenziali per $\underline{F}$.
(Chiaramente, nelle applicazioni, si lavorerà al di fuori della superficie di separazione, cioè su $\{x>0\}$ o su $\{x<0\}$, per cui non è sbagliato, sebbene non sia esteriormente completo, restringersi in partenza ad una di queste due regioni).

c- Il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ, <u>osservato che γ giace tutta nella regione $\{x<0\}$</u>, può essere calcolato come differenza di potenziale agli estremi della curva:

$$\varphi(1) = \left(-2, 1, \cos\frac{1}{2}\right) \ ; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

perciò

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{\varphi} = U\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(\varphi(1)) = \left(\frac{(2\pi-12)^2}{\pi^4 3}\cdot\frac{\pi}{2} - \log\left|\frac{2\pi}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2}\right| + \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right) - \left(4 - \log|-2| + 3\cos\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\pi^2 + 72 - 24\pi}{\pi^3} - \log \frac{12-2\pi}{\pi^2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi - 4 + \log 2 - 3\cos\frac{1}{2} \right).$$

4) $\hat{\underline{F}}(x,y,z) = \left(\arctan(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

Poichè la superficie in questione è il bordo di un dominio in $\mathbb{R}^3$, risulta comodo applicare il teorema della DIVERGENZA

$\left(S = \partial D \quad \text{ove } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{9}{4} \le x^2+y^2 \le 4,\ -\sqrt{3}\,x \le y \le \sqrt{3}\,x,\ z \in [0,1] \right\} \right)$

Per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_S \hat{\underline{F}} \cdot \underline{n_e}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \hat{\underline{F}}\, dx\,dy\,dz$$

$\underline{n_e}$ uscente da S

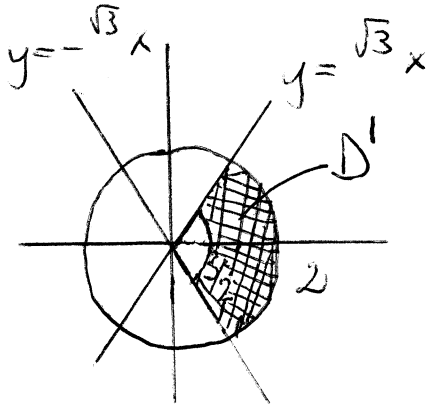
Si ha $\operatorname{div} \hat{F} = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial z} =$

$$= 0 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Dobbiamo perciò calcolare

$$\iiint_D \frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{\substack{\frac{9}{4} \le x^2+y^2 \le 4 \\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x}} \frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{\substack{\frac{9}{4} \le x^2+y^2 \le 4 \\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x}} \frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy =: I$$



Risulta comodo passare a coordinate polari,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

osservando che ρ varia tra $\frac{3}{2}$ e 2, e θ varia tra $\arctg(-\sqrt{3})$ e $\arctg\sqrt{3}$, ovvero tra $-\pi/3$ e $\pi/3$.

Si ha cioè che $(\rho,\theta)\in\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_0^+\times[0,2\pi] \,/\, \frac{3}{2}\le\rho\le 2,\ -\pi/3\le\theta\le\pi/3\right\}$

Quindi

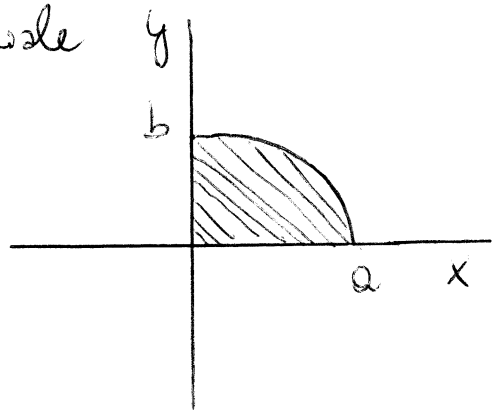
$$I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+1}{\cancel{\rho}}\cdot\underbrace{\cancel{\rho}}_{\text{jacobiano!}}\,d\theta\,d\rho=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+1)\,d\theta\,d\rho=$$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left[\cancel{\rho\left(-\cos\theta\right)\Big|_{\theta=-\pi/3}^{\theta=\pi/3}}+\frac{2\pi}{3}\right]d\rho=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{2\pi}{3}\,d\rho=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

(sen θ è una funzione dispari, integrata su un intervallo simmetrico è 0!)

$$\left[\text{FILA B: } \int_{\frac{4}{3}}^{2}\frac{2\pi}{3}\,d\rho=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\pi.\right]$$

5) Lamina materiale $\mathcal{L}$



$a > b$

$\sigma(x,y) = \frac{1}{2} x y^2$

Equazione dell'ellisse in questione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Osserviamo che l'interno dell'ellisse è descritto dalla disequazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, perciò la lamina $\mathcal{L}$ è data, nel piano cartesiano, da

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Risolveremo l'esercizio in due modi, calcolando cioè un integrale doppio oppure utilizzando le formule di Gauss-Green.

$\boxed{1}$ Integrale doppio

Dobbiamo calcolare

$$m = \iint_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} x y^2 \, dx\, dy \ ; \quad \text{poniamo} \quad \begin{cases} x = a r \cos t \\ y = b r \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad r \in [0,1],\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(l'esercizio si può anche risolvere utilizzando le coordinate cartesiane)

Osserviamo che tale cambio di variabili è un diffeomorfismo di $\mathcal{L}$ in $[0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; lo jacobiano di tale cambio di variabili è dato da

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t & -a r \operatorname{sen} t \\ b \operatorname{sen} t & b r \cos t \end{pmatrix} = abr.$$

Perciò

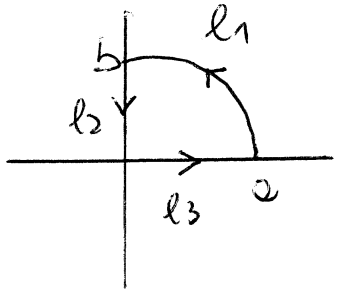
$$m := \iint_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} x y^2 \, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} ar\cos t \, b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot abr \, dt\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} a^2 b^3 r^4 \cos t \operatorname{sen}^2 t \, dt\, dr = \frac{a^2 b^3}{2} \int_0^1 r^4 \left. \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right|_0^{\pi/2} dr =$$

$$= \frac{a^2 b^3}{6} \cdot \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^1 = \frac{a^2 b^3}{30}.$$ (massa della lamina)

[FILA B: $\frac{a^2 b^3}{15}$]

$\boxed{2}$ Gauss-Green



ℓ_1: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, \pi/2]$

ℓ_2: $\begin{cases} x = 0 \\ y = b - t \end{cases}$ $t \in [0, b]$

ℓ_3: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t \in [0, a]$

Utilizziamo, per esempio, la formula $\displaystyle\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\,dy = \int_{\partial^+ D} f \, dy$

(Corrada!)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} x y^2 \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4} x^2 y^2.$$

Perciò dobbiamo integrare $\displaystyle\int_{\partial^+ D} \frac{1}{4} x^2 y^2 \, dy =$

$$= \frac{1}{4} \int_{\ell_1} x^2 y^2 \, dy + \cancel{\frac{1}{4} \int_{\ell_2} x^2 y^2 \, dy} + \cancel{\frac{1}{4} \int_{\ell_3} x^2 y^2 \, dy} = \frac{1}{4} \int_{\ell_1} x^2 y^2 \, dy =$$

$(x = 0$ su $\ell_2)$ $(y' = 0$ su $\ell_3)$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (0, a^2\cos^2 t\, b^2 \operatorname{sen}^2 t)\cdot(-a\operatorname{sen} t, b\cos t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} a^2 b^3 \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t\, dt = \frac{a^2b^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t\, dt =$$

$\operatorname{sen} t = s$
(in $[0, \pi/2]$ è una funzione
è un diffeo
$\cos t\, dt = ds$.

$$= \frac{a^2b^3}{4}\int_0^1 (1-s^2)s^2\, ds =$$

$$= \frac{a^2b^3}{4}\left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5}\right]_0^1 = \frac{a^2b^3}{4}\cdot\frac{2}{15} = \frac{a^2b^3}{30}.$$

- Per calcolare l'ordinata del baricentro, ovvero

sfruttiamo per esempio il calcolo dell'integrale doppio

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\,\sigma(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} a^2 b^3 r^4 \cos t \operatorname{sen}^2 t \cdot b r \operatorname{sen} t\, dt\, dr =$$

$$= \frac{30}{a^2b^3}\frac{1}{2} a^2 b^4 \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^5 \cos t \operatorname{sen}^3 t\, dt =$$

$$= 15b\int_0^1 r^5 \left.\frac{\operatorname{sen}^4 t}{4}\right|_0^{\pi/2} dr = \frac{15b}{4}\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^1 = \frac{15}{24} b = \frac{5}{8} b$$

Equivalentemente, si poteva procedere anche con Gauss-Green:

$$y_G = \frac{1}{m}\int_{\ell_1} \frac{1}{4} x^2 y^3\, dy = \frac{30}{4a^2b^3}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, b^3 \operatorname{sen}^3 t \cdot b\cos t\, dt =$$

$$= \frac{15}{2\cancel{a^2b^3}}\cancel{a^2b^3}\cdot b\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,\mathrm{sen}^3 t\,dt = \frac{15}{2}b\int_0^1 (1-s^2)s^3\,ds =$$

cambio di variabile precedente

$$= \frac{15}{2}b\,\frac{s^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{15}{2}b\,\frac{s^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{15}{8}b - \frac{15}{12}b = \frac{15}{24}b.$$

Facoltativo: ascissa del baricentro

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}a^2r^2\cos^2 t\cdot b^2r^2\,\mathrm{sen}^2 t\cdot \underbrace{abr}_{\text{jacob.}}\,dt\,dr =$$

$$= \frac{30}{\cancel{a^2b^3}}\cancel{a^3b^3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} r^5\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{15a\pi}{16}\int_0^1 r^5\,dr = \frac{\cancel{15}^{5}}{16}\frac{1}{\cancel{6}_2}a\pi = \frac{5}{32}\pi\cdot a.$$

Gauss-Green:

$$x_G = \frac{1}{m}\int_{\ell_1}\frac{1}{6}x^3y^2\,dy = \frac{30}{6a^2b^3}\int_0^{\pi/2} a^3\cos^3 t\cdot b^2\,\mathrm{sen}^2 t\cdot b\cos t\,dt =$$

formule duplicazione

$$= 5a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t\,dt = 5a\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t-\cos^6 t)\,dt = \dots =$$

$$= 5a\left(\frac{3\pi}{16}-\frac{5\pi}{32}\right) = \frac{5}{32}\pi\cdot a.$$