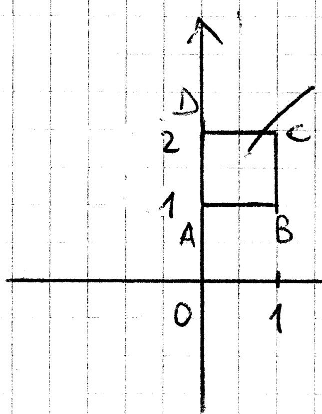
1) a- $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y^2, \; -6xy)$

$\nabla \cdot \nabla f(x,y) = 6x - 6x = 0$ (siccome $\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ per $F = (F_1, F_2)$),

b- 

$Q = [0,1] \times [1,2]$

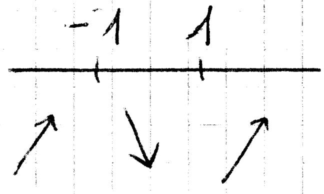
Noto che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se $\begin{cases} x=0 \\ -3y^2=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y=0 \\ 3x^2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x,y) = (0,0)$ solo se $(x,y) = (0,0)$ punto esterno a Q.

Restringo f a ∂Q:

• $f|_{AB} = \underset{x\in[0,1]}{f(x,1)} = x^3 - 3x$; $f'|_{AB}(x) = 3x^2 - 3$

$f'|_{AB}$ si annulla in $x=-1$ e in $x=1$



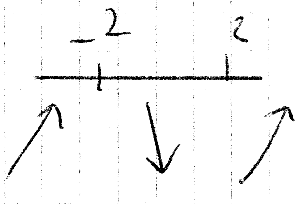
$\Rightarrow$ $f|_{AB}$ è decrescente per $x \in [0,1]$, quindi assume massimo in $x=0$ e minimo in $x=1$: $P_1(0,1)$ massimo per $f|_{AB}$, $P_2(1,1)$ minimo per $f|_{AB}$

• $f|_{BC} = \underset{y\in[1,2]}{f(1,y)} = 1 - 3y^2$; $f'|_{BC}(y) = -6y$ sempre <0 per $y \in [1,2]$

quindi $f|_{BC}$ assume massimo in $P_2 = (1,1)$, minimo in $P_3 = (1,2)$

- $f|_{CD}(x) = \underset{x \in (0,1)}{f(x,2)} = x^3 - 12x$, $f|_{CD}'(x) = 3x^2 - 12$

$f'|_{CD}$ si annulla in $x = \pm 2$



$\Rightarrow$ $f|_{CD}(x)$ è sempre decrescente perciò $f|_{CD}$ assume massimo in $P_4 = (0,2)$ e minimo in $P_5\,(1,2) = P_3$

- $f|_{DA}(x) = \underset{y \in [1,2]}{f(0,y)} = 0$ (quindi $f|_{DA}$ è costante).

Ora confronto tutti i valori massimi / minimi

MASSIMI

$f(P_1) = 0$, $f(P_2) = -2$, $f(P_4) = 0$; inoltre $f|_{DA} \equiv 0$

Perciò $\max_Q f = 0$, cosicché l'insieme dei punti di massimo di f è dato da

$$\mathcal{M}^+ = \{P_1, P_4\} \cup \{0\} \times [1,2].$$

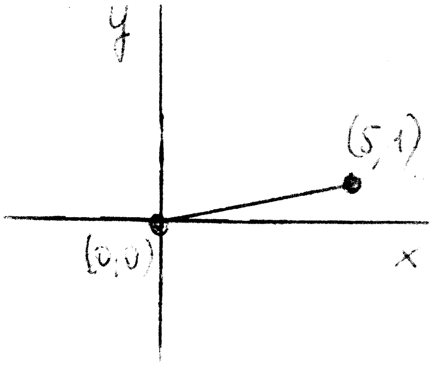
MINIMI

$f(P_2) = -2$, $f(P_3) = 1 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = -11 < 0$ (valore di f su DA)

Perciò $\min_Q f = -11$, cosicché l'insieme dei punti di minimo assoluto di f su Q è dato da

$$\mathcal{M}^- = \{P_3\}.$$

C -



Parametrizzo il segmento (incluso nella retta $y = \frac{1}{5}x$)

$$\Rightarrow \gamma: \varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{5}t \end{cases}$$

$t \in [0,5]$ $\qquad \varphi'(t) = (1, \frac{1}{5})$

Per calcolare la massa dobbiamo calcolare $\qquad \|\varphi'(t)\| = \frac{\sqrt{26}}{5}$.

$$\int_C f(x,y)\, dl = \frac{\sqrt{26}}{5}\int_0^5 \left[t^3 - 3t\frac{1}{25}t^2\right] dt =$$

$$= \frac{\sqrt{26}}{5}\int_0^5 \left(t^3 - \frac{3}{25}t^3\right) dt = \frac{\sqrt{26}}{5}\frac{22}{25}\int_0^5 t^3 dt = \frac{22\sqrt{26}}{125}\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^5 = \frac{\overset{11}{\cancel{22}}\sqrt{26}\,\overset{5}{\cancel{625}}}{\underset{1}{\cancel{125}}\cdot\underset{2}{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{55\sqrt{26}}{2}.$$

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 - x^4y}{x^4+y^4} + 1 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è un rapporto di polinomi che non si annullano $\Rightarrow f \in C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- CONTINUITÀ in $(0,0)$ $\qquad$ LIMITE CANDIDATO

Passo a coordinate polari, valutando $f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) - \ell$!!

$$f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) - 1 = \frac{\rho\cos\theta\,\rho^4\text{sen}^4\theta - \rho^4\cos^4\theta\,\rho\,\text{sen}\,\theta}{\rho^4(\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta)} =$$

$$\rho \; \underbrace{\frac{\cos\vartheta \operatorname{sen}^4\vartheta - \cos^4\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^4\vartheta}}$$

- il denominatore $\cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^4\vartheta$ ha minimo strettamente positivo per $\vartheta \in [0, 2\pi)$; chiamo tale minimo η.
- il numeratore è maggiorato da 2 $\Rightarrow$ ho una funzione $g(\vartheta)$ LIMITATA

Quindi $\left| f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta)_1 \right| \leq \rho \frac{2}{\eta} \to 0$ per $\rho \to 0$

(uniformemente in ϑ).

$\Rightarrow$ f è CONTINUA in $(0,0)$.

- DERIVATE PARZIALI in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{la funzione è } \neq 1 \\ \text{per } y=0 \\ x \neq 0\end{array}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \quad \left(\begin{array}{c}f \text{ è } = 1 \\ \text{per } x=0 \\ y \neq 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $\exists \; Df(0,0) = (0,0)$.

- DIFFERENZIABILITÀ in $(0,0)$

Il candidato differenziale in $(0,0)$ è il prodotto scalare per $Df(0,0)$ (cioè "0")

Devo valutare

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \cancel{\langle (0,0) \cdot (h,k) \rangle}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^4 - h^4 k}{\sqrt{h^2+k^2}\cdot(h^4+k^4)} \quad (\star)$$ ②

Passando a coordinate polari: $h = \rho\cos\vartheta$, $k = \rho \operatorname{sen}\vartheta$

$$\frac{\rho^5 \operatorname{sen}^4\vartheta\cos\vartheta - \rho^5\cos^4\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\rho^5(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)} = \frac{\operatorname{sen}^4\vartheta\cos\vartheta - \cos^4\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta},$$

quantità che dipende da ϑ. Perciò il limite $(\star)$ $\nexists$ e la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.
(lo stesso si può vedere sulle rette $k = mh$).

3) $$y'' - 8y' + 16y = e^{2x} + \frac{e^{4x}}{x} + 1$$

1- Eq. omogenea

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ con molteplicità doppia}$$

$\Rightarrow$ Integrale generale $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con $y_1(x) = e^{4x}$, $y_2(x) = xe^{4x}$.

2- Uso il metodo di sovrapposizione

(E1) $y'' - 8y' + 16y = e^{2x}$

Posso usare il metodo di somiglianza

$$e^{2x} = e^{px}(h(x)\cos qx + k(x)\operatorname{sen} qx) \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} p = 2 \\ q = 0 \\ h = 1 \\ k = 0 \end{array}$$

Cerco allora soluzioni della forma

$$\bar{y}_1(x) = Ae^{2x}$$

m: molteplicità di 2 come soluzione dell'c... caratteristica $\Rightarrow m = 0$

$$\bar{y}_1'(x) = 2Ae^{2x}$$

$$\bar{y}_1''(x) = 4Ae^{2x}$$

$$\bar{y}_1'' - 8\bar{y}_1' + 16\bar{y}_1 = 4Ae^{2x} - 16\cancel{Ae^{2x}} + \cancel{16}Ae^{2x} \underset{\text{DEVE}}{=} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 4A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

Perciò, soluzione particolare di (E1): $\bar{y}_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$.

$$(E2) \quad y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x}$$

Il metodo della somiglianza non può qui essere applicato

→ impongo il sistema (ricordo che $y_1(x) = e^{4x}$, $y_2(x) = xe^{4x}$ sono soluzioni indipendenti)

$$\begin{cases} k_1' e^{4x} + k_2' x e^{4x} = 0 \\ 4k_1' e^{4x} + k_2'(e^{4x} + 4xe^{4x}) = \dfrac{e^{4x}}{x} \end{cases}$$

Cosicché

$$k_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{4x} \\ \frac{e^{4x}}{x} & e^{4x}+4xe^{4x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & e^{4x}+4xe^{4x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{8x}}{e^{8x} + \cancel{4xe^{8x}} - \cancel{4xe^{8x}}} = -1$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = -x.$$

$$k_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & \frac{e^{4x}}{x} \end{vmatrix}}{e^{8x}} = \frac{\frac{e^{8x}}{x}}{e^{8x}} = \frac{1}{x}$$

(calcolando k_1' ho calcolato anche il wronskiano $W(x)$)

Quindi $k_2(x) = \log|x| \Rightarrow \bar{y}_2(x) = \cancel{-x e^{4x}} + x\log|x|\, e^{4x}$.

(E3) $y'' - 8y' + 16y = 1$

Si vede subito che una soluzione particolare è $\bar{y}_3(x) = \frac{1}{16}$.
(a secondo membro ho una costante).

RISPOSTA ALL'ESERCIZIO:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + x\log|x|\, e^{4x} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

ricomprendo
qui anche il
primo pezzo di $\bar{y}_2$

4) a- $\underline{F}(x,y,z) = \left(3e^x(y^2+z^2),\ 6e^x y,\ 6e^x z\right)$

Si vede subito che il campo è irrotazionale

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 6e^x y = \frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 6e^x z = \frac{\partial f_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

Siccome $\underline{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ (sempl. connesso), $\underline{F}$ è conservativo.

Per determinare un potenziale U, inizio dalla terza componente:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 6e^x z \Rightarrow U_1(x,y,z) = 3e^x z^2 + g(x,y) \quad \text{(integrando in } dz\text{)};$$

poi

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} \overset{\text{DEVE}}{=} 6e^x y \xRightarrow{\text{integro in } dy} g(x,y) = 3e^x y^2 + h(x), \text{ cosicché}$$

$$U_2(x,y,z) = 3e^x z^2 + 3e^x y^2 + h(x)$$

Siccome $\frac{\partial U_2}{\partial x} = 3e^x(z^2+y^2) + h'(x) \overset{\text{DEVE}}{=} 3e^x(y^2+z^2)$, $\boxed{h' = 0}$

Una famiglia di potenziali per F è data da

$$U(x,y,z) = 3e^x z^2 + 3e^x y^2 + c$$

Si vuole trovare U / $U(0,0,0) = 2$

$$\Rightarrow U(0,0,0) = c \Rightarrow c = 2$$

RISPOSTA ALL'ES: $U(x,y,z) = 3e^x z^2 + 3e^x y^2 + 2$.

b- $\varphi(t) = (t(t-2\pi), \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

<u>REGOLARE</u> Le componenti sono $C^1([0,2\pi])$

Inoltre $\varphi'(t) = (2t-2\pi, -\operatorname{sen} t, \cos t)$ che in $[0,2\pi]$ non si annulla mai (la prima componente è nulla solo per $t=\pi$, ove la terza vale -1)

<u>SEMPLICE</u>

Siano $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ tali che

$$\begin{cases} t_1(t_1-2\pi) = t_2(t_2-2\pi) \\ \cos t_1 = \cos t_2 \\ \operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2 \end{cases}$$

Dalla seconda ho $t_1 = t_2$ oppure $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ oppure
$\boxed{t_1 = 2\pi - t_2}$ (poiché $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$)

Se $t_1 = 2\pi - t_2$, però, $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen}(2\pi - t_2) = -\operatorname{sen} t_2$ mentre per la 3^a equazione $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2$

$\Rightarrow$ l'unica possibilità è

$\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2 = 0 \Rightarrow$ in $[0, 2\pi]$ si ha $\operatorname{sen} t_1 = 0$ per $t_1 = 0$, $t_1 = \pi$, $t_1 = 2\pi$; in tal caso $t_2 = 2\pi - t_1 = 2\pi$, $t_2 = \pi$, $t_2 = 0$ rispetti...

$\Rightarrow$ Tu ... ho trovato $t_1 = t_2$ oppure $t_1 = 0$ $t_2 = 2\pi$ oppure $t_1 = 2\pi$, t_2

$\Rightarrow$ la curva è semplice.

(3)

CHIUSA

$\varphi(0) = (0,1,0) = \varphi(2\pi) = (0,1,0) \Rightarrow \gamma$ è chiusa.

Poiché γ è chiusa e $\underline{F}$ è conservativo,

$$\int_\gamma \underline{F}\, d\underline{\varphi} = 0.$$

c- Parametrizzo la superficie esegnata con $\underline{r}: D \to \mathbb{R}^3$ dove da

$$\underline{r}: \begin{cases} x = \log\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right) & \left(x = \log\left[(u^2+v^2)^{-1}\right]\right) \\ y = u & , \\ z = v \end{cases}$$

ove D (dato dell'esercizio) è: $D = \{(u,v) / 1 \le u^2+v^2 \le 2\}$

Calcolo

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(-\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}\cdot 2u, 1, 0\right) = \left(-\frac{2u}{u^2+v^2}, 1, 0\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left(-\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}\cdot 2v, 0, 1\right) = \left(-\frac{2v}{u^2+v^2}, 0, 1\right)$$

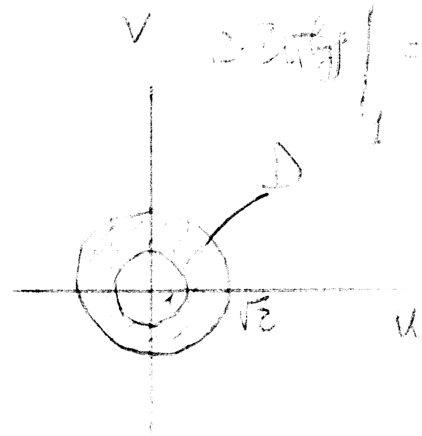
$$\underline{\nu} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \left(1, \frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2}\right)$$

$$\underline{\Phi} = \int_S \underline{F}\,\underline{n}\, dS = \iint_D \underline{F}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{\nu}(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \iint_D \left\langle \left(3\cancel{\frac{1}{u^2+v^2}(u^2+v^2)}, \frac{6u}{u^2+v^2}, \frac{6v}{u^2+v^2}\right), \left(1, \frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2}\right) \right\rangle du\,dv$$

$$= \iint_D 3 + \frac{12u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{12v^2}{(u^2+v^2)^2}\,du\,dv = 3\iint_D du\,dv + \iint_D \frac{12}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot 12 \int_1^{\sqrt{2}} \ldots = 12\pi \log 2$$



Siccome $\iint_D du\,dv = \text{Area}(D)$ e

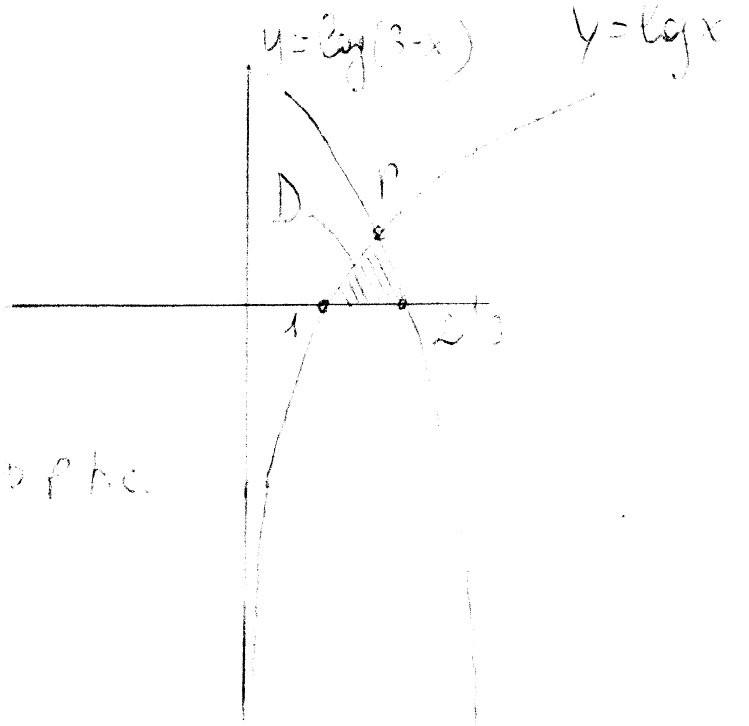
D è l'anello in figura, essendo

$\text{Area}(D) = \pi(\sqrt{2})^2 - \pi(1)^2 = \pi$,

si ha che $\Phi = 12\pi \log 2 + 3\pi$.

5)

$$\iint_D e^{x} + e^{y}\,dx\,dy$$



Le due curve si intersecano nel punto P t.c.

$$\log x = \log(3-x)$$

Esponenziando: $x = 3 - x$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Perciò $P\left(\frac{3}{2}, \log\frac{3}{2}\right)$

Posso allora scrivere D come unione di domini y-semplici:

$D = D_1 \cup D_2$ ove

$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \le x \le \frac{3}{2},\ 0 \le y \le \log x \right\}$ e

$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{3}{2} \le x \le 2,\ 0 \le y \le \log(3-x) \right\}$

Perciò

$$\iint_D e^{2y}+e^y \, dx\,dy = \int_1^{3/2} \left(\int_0^{\log x} e^{2y}+e^y \, dy \right) dx + \int_{3/2}^{2} \left(\int_0^{\log(3-x)} e^{2y}+e^y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^{3/2} \left(\frac{e^{2y}}{2}+e^y \right)\Big|_0^{\log x} dx + \int_{3/2}^{2} \left(\frac{e^{2y}}{2}+e^y \right)\Big|_0^{\log(3-x)} dx =$$

$$= \int_1^{3/2} \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_{3/2}^{2} \left[\frac{(3-x)^2}{2} + (3-x) - \frac{3}{2} \right] dx = \int_1^{3/2} \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_{3/2}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6 \right.$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x \right]_1^{3/2} + \left[\frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x \right]_{3/2}^{2} = \frac{27}{48} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} +$$

$$+ 12 - \frac{27}{48} + \frac{9}{2} - 9 = \frac{\cancel{266}^{\,133}}{\cancel{48}_{\,24}} - 5 = \frac{13}{24}.$$

In alternativa, si potevano usare le formule di Gauss-Green.