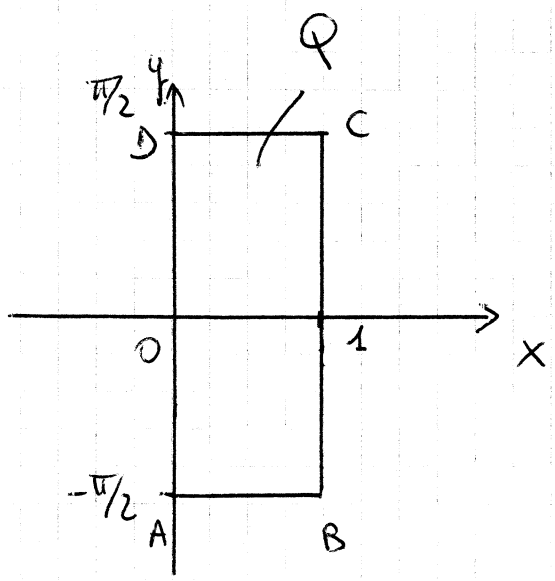
07/06/13 Fila A

1) a- $f(x,y) = e^x \cos y$

$\nabla f(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$

$\nabla \cdot \nabla f(x,y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$ (siccome $\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ per $F = (F_1, F_2)$)

b -



$Q = [0,1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Noto che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ implicherebbe $\begin{cases} \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Considero perciò le restrizioni di f alla frontiera

- $f|_{AB} = f|_{[0,1] \times \{-\pi/2\}} = e^x \cos(-\pi/2) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

- $f|_{BC} = f|_{\{1\} \times [-\pi/2, \pi/2]} = e \cos y$ per $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Il $\cos y$ è massimo per $y = 0$ e minimo per $y = -\pi/2$, $y = \pi/2$ se $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\Rightarrow$ $P_1(1,0)$ massimo per $f|_{BC}$, $P_2(1, -\pi/2)$, $P_3(1, \pi/2)$ minimi per $f|_{BC}$

- $f|_{CD} = f|_{[0,1] \times \{\pi/2\}} = e^x \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

- $f|_{AD} = f|_{\{0\} \times [-\pi/2, \pi/2]} = 1 \cdot \cos y$ per $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Analogamente a prima, $f|_{AD}$ è massima in $(0,0)$ e minima in $(0,-\pi/2)$ e $(0,\pi/2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P_4(0,0)$ massimo per $f|_{AD}$, $P_5(0,-\pi/2)$ e $P_6(0,\pi/2)$ minimi per $f|_{AD}$

• Poiché $f(1,0) = e > f(0,0) = 1 > 0$,
(valore sui lati AB e CD)

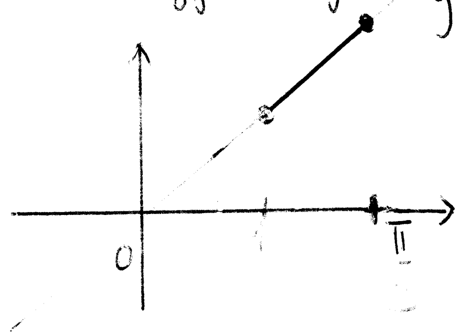
$P_1(1,0)$ è PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per f su Q.

• Inoltre $\underbrace{f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = f(P_6)}_{\text{valori minimi sui lati corrispondenti}} = f|_{AB} = f|_{CD} = 0$,

quindi i punti di minimo assoluto per f su Q sono

$$\forall (x,y) \in [0,1] \times \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup [0,1] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{P_2, P_3, P_5, P_6\}.$$

C- Parametrizzo il filo $y = x$



$$\gamma: \varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi'(t) = (1,1) \quad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Per calcolare la massa dobbiamo calcolare

$$\int_\gamma f(x,y)\, dl = \int_1^{\pi/2} f(t,t) \cdot \|\varphi'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_1^{\pi} (e^t \cos t \cdot \sqrt{2})\, dt = \sqrt{2} \int_1^{\pi} e^t \cos t\, dt \overset{\text{PARTI (2 volte)}}{=}$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{1}{2} e^t (\cos t + \operatorname{sen} t) \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}}(+1+0) - \frac{\sqrt{2}}{2} e (\cos 1 + \operatorname{sen} 1)$$

$$= + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} e \cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e \operatorname{sen} 1.$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-x^2y^3}{x^4+y^4}+1 & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- Per $(x,y)\neq(0,0)$ la funzione è un rapporto di polinomi ove il denominatore non si annulla mai $\Rightarrow f\in C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

- <u>CONTINUITÀ in $(0,0)$</u>

Passo a coordinate polari: (scrivo $f(x,y)-l$!!)

$$f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)-1=\frac{\rho^3\cos^3\vartheta\,\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta-\rho^2\cos^2\vartheta\,\rho^3\operatorname{sen}^3\vartheta}{\rho^4\cos^4\vartheta+\rho^4\operatorname{sen}^4\vartheta}=$$

$$=\frac{\rho^{\cancel{5}}\left(\cos^3\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta-\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta\right)}{\cancel{\rho^4}\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)}=\rho\underbrace{\frac{\cos^3\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta-\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta}{\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta}}$$

è una funzione $g(\vartheta)$ limitata (il denominatore è discosto da 0) (cioè $\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\geq\eta>0$ per un'opportuna η, ovvero ha minimo positivo) (il numeratore è maggiorato da 2)

$\longrightarrow 0$ per $\rho\to 0$ indipendentemente da ϑ.

$\Rightarrow f$ è CONTINUA in $(0,0)$.

- <u>DERIVATE PARZIALI in $(0,0)$</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$ (la funzione è $=1$ per $y=0$, $x\neq0$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$ (la funzione è $=1$ per $x=0$, $y\neq0$)

$\Rightarrow \exists\, Df(0,0)=(0,0)$.

- <u>DIFFERENZIABILITÀ in $(0,0)$</u>

Poiché $\nabla f(0,0) = 0$, il "candidato differenziale" di f è il prodotto scalare per il vettore nullo

Devo cioè valutare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \cancel{\langle (0,0),(h,k)\rangle}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3k^2 - h^2k^3}{h^4+k^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad (*)$$

Passando a coordinate polari dobbiamo cioè studiare il comportamento di

$$\frac{\rho^3\cos^3\vartheta\,\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta - \rho^2\cos^2\vartheta\,\rho^3\operatorname{sen}^3\vartheta}{\rho^4(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)} \cdot \frac{1}{\rho} \qquad \text{per } \rho\to 0$$

$\to$ otteniamo $\dfrac{\cancel{\rho^5}(\cos^3\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta - \cos^2\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta)}{\cancel{\rho^5}(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta)}$, quantità che

dipende da ϑ! Perciò il limite $(*)$ non esiste e la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

In effetti, per $k = mh$, abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,mh) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+m^2h^2}} = \frac{m^2h^5 - m^3h^5}{(1+m^4)h^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)h^2}},$$

limite che dipende da m.

3)

$$y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen}x} + \operatorname{sen}^3 x$$

1- Risolvo prima l'omogenea

$\lambda^2 + 1 = 0$ eq. caratteristica

$\Rightarrow \lambda = \pm i$ quindi $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ soluzioni indipendenti

Integrale generale omogenea: $C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2- Poiché abbiamo una somma a secondo membro, usiamo il metodo di sovrapposizione

Risolvo prima (E1) $y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ (cerco una sol. particolare)

Il metodo della somiglianza non può più essere applicato

$\rightarrow$ impongo il sistema

$$\begin{cases} k_1'(x)\, y_1(x) + k_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ k_1'(x)\, y_1'(x) + k_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

cioè (per come sono definite y_1, y_2)

$$\begin{cases} k_1'(x) \cos x + k_2'(x) \operatorname{sen} x = 0 \\ -k_1'(x) \operatorname{sen} x + k_2'(x) \cos x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \quad \rightarrow \quad k_1(x) = -x.$$

$$k_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow k_2(x) = \log|\operatorname{sen} x|.$$

Una soluzione particolare di (E1) è perciò $k_1(x)y_1(x)+k_2(x)y_2(x)$ cioè

$\bar{y}_1(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \log|\operatorname{sen} x|$.

Risolviamo (E2) $y''+y = \operatorname{sen}^3 x$

Anche qui il metodo della somiglianza non si applica $\Rightarrow$ costanti arbitrarie

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1'(x)\cos x + h_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -h_1'(x)\operatorname{sen} x + h_2'(x)\cos x = \operatorname{sen}^3 x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ancora $W(x) = 1$ (il wronskiano di y_1, y_2), quindi ometto di scriverlo

$$\Rightarrow \quad h_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}^3 x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^4 x$$

Quindi $h_1(x) = -\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = -\frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx =$

$\left(\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{4}\int (1+\cos^2 2x - 2\cos 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.$$

$$h_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{sen}^3 x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^3 x \cos x$$

Quindi $h_2(x) = \int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}$.

Una soluzione particolare di (E2) è perciò $h_1(x)\,y_1(x) + h_2(x)\,y_2(x)$, cioè

$$\bar{y}_2(x) = \left(-\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\,4x\right)\cos x + \frac{\mathrm{sen}^4 x}{4}\,\mathrm{sen}\,x =$$

$$= \left(-\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\,4x\right)\cos x + \frac{\mathrm{sen}^5 x}{4}.$$

RISPOSTA ALL' ESERCIZIO:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x - x\cos x + \mathrm{sen}\,x\cdot\log|\mathrm{sen}\,x| +$$
$$+ \cos x\left(-\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\,4x\right) + \frac{\mathrm{sen}^5 x}{4} =$$

$$= C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x - \frac{11}{8}x\cos x + \mathrm{sen}\,x\cdot\log|\mathrm{sen}\,x| +$$
$$+ \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x\cos x - \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\,4x\cos x + \frac{\mathrm{sen}^5 x}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) a- $\underline{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ z,\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Il campo non è evidentemente conservativo nel suo dominio, poiché per esempio

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$$

b- γ: $\varphi(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$ $\quad t \in [0,\pi]$

<u>REGOLARE</u> Le componenti sono $C^1([0,\pi])$

Inoltre $\varphi'(t) = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t)$ che in $[0,\pi]$ non si annulla mai (la III componente è $=0$ solo in $t=0$, ove $\varphi_2(t) = \cos t$ è pari a 1)

$\Rightarrow$ φ è REGOLARE

SEMPLICE   Siano $t_1, t_2 \in [0, \pi]$ tali che

$$\begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2 \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ho $t_1 = t_2$ o $t_1 = -t_2$, ma $t_1, t_2 \in [0, \pi]$ perciò $t_1 = t_2 \Rightarrow$ la curva è semplice.

CHIUSA

Si ha $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq \varphi(\pi) = (-1, 0, \pi^2) \rightarrow \gamma$ non è chiusa

Calcolo il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ mediante la definizione, ricordando che $\varphi'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$

$$I = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\varphi = \int_0^\pi \underline{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \left\langle \left(\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t},\ t^2,\ \frac{t^2}{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}} \right) \cdot \left(-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t \right) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^\pi \left\langle (1, t^2, t^2) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t) \right\rangle dt =$$

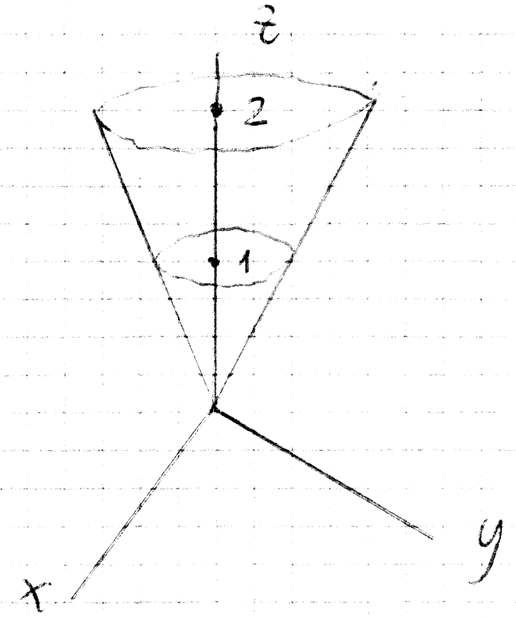
$$= \int_0^\pi (-\operatorname{sen} t + t^2 \cos t + 2t^3)\, dt = \cos t \Big|_0^\pi + \int_0^\pi t^2 \cos t\, dt + 2 \frac{t^4}{4} \Big|_0^\pi = (*)$$

Calcolo $\int (t^2 \cos t)\, dt \overset{\text{PART}}{=} +t^2 \operatorname{sen} t - 2 \int t \operatorname{sen} t\, dt \overset{\text{PART}}{=} +t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t -$
$+ 2 \int \cos t\, dt = +t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t - 2 \operatorname{sen} t$

Quindi $I = (*) = -1 - 1 + \pi^2 \cancel{\operatorname{sen} \pi} + 2\pi \cos \pi - \cancel{2 \operatorname{sen} \pi} - \cancel{0} + 2 \frac{\pi^4}{4} - \cancel{0}$ =

$$= -2 - 2\pi + \frac{\pi^4}{2}.$$

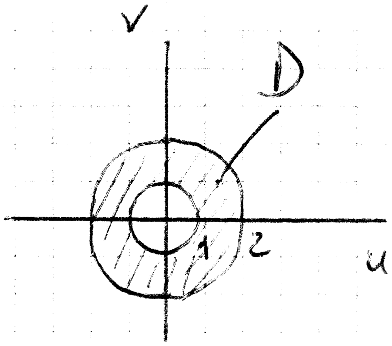
c –



Parametrizzo la superficie: $\underline{r}: D \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\underline{r}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases},$$

ove D è dato da $1 \le z \le 2 \Rightarrow$
$1 \le \sqrt{u^2+v^2} \le 2$, cioè
$1 \le u^2+v^2 \le 4$.



$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\underline{\nu} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

Calcolo il flusso mediante la definizione

$$\int_S \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_D F(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{\nu}(u,v) \, du \, dv =$$

$$\iint_D \langle(\sqrt{u^2+v^2},\ \sqrt{u^2+v^2},\ 1),\ \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\ 1\right) du\,dv =$$

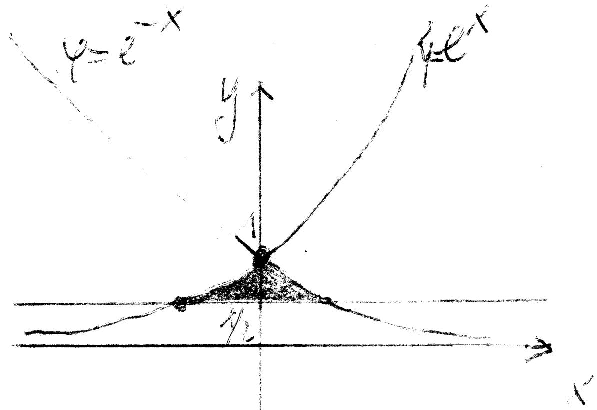
$$= \iint_D (-u-v+1)\,du\,dv \underset{\text{coordinate polari in }D}{=} \iint_D \left[-\rho(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)+1\right]\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 -\rho^2(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)+\rho\ d\rho\right]d\vartheta = \int_0^{2\pi}(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)\left(-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_1^2 d\vartheta +$$

$$+ 2\pi\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2 = -\frac{7}{3}\cancel{(\operatorname{sen}\vartheta-\cos\vartheta)\Big|_0^{2\pi}} + 4\pi-\pi = 3\pi.$$

(Si poteva anche ragionare per simmetria: $\iint_D -u-v = 0$.)

5) $$\iint_D \log y\ dx\,dy$$



$D=\{(x,y)/\ \frac{1}{2}\le y\le 1,\ e^{-y}\le x\le e^{y}\}$

($y=e^x$ e $y=e^{-x}$ si intersecano evidentemente nel punto $(0,1)$).

$$\iint_D \log y\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\log y\int_{\log(y)}^{\log(1/y)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\log y\,(\ \dots\ )\,dy$$

$\Rightarrow$ non è conveniente

Decomponiamo D in due domini y-semplici

$D = D_1 \cup D_2$ ove $D_1 = \{(x,y) / \ln\frac{1}{2} \leq x \leq 0,\ \frac{1}{2} \leq y \leq e^x\}$

$D_2 = \{(x,y) / 0 \leq x \leq \ln 2,\ \frac{1}{2} \leq y \leq e^{-x}\}$

(la retta $y = \frac{1}{2}$ interseca le curve $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ nei punti di ascisse $x = \ln\frac{1}{2}$ e $x = \ln 2$ rispettivamente)

$$\iint_D \log y \, dy\,dx = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{e^x} \log y \, dy \right) dx + \int_{0}^{\ln 2} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{e^{-x}} \log y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} (y\log y - y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{e^x} dx + \int_{0}^{\ln 2} (y \log y - y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{e^{-x}} dx =$$

$$= \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} \left(e^x \cdot x - e^x - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{0}^{\ln 2} \left(e^{-x}(-x) - e^{-x} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left[xe^x - 2e^x \right]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} + \left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)\left(-\log\frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \left[+xe^{-x} + 2e^{-x} \right]_{0}^{\ln 2} + \left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)(\log 2) =$$

$$= -2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log^2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\log 2 +$$

$$\frac{1}{2}\log^2 2 + 1 - 2 =$$

$$= -2 - \log\frac{1}{2} + \log 2 \overbrace{- \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\log 2}^{\frac{1}{2}\log 2 \cdot \log 2} + \frac{1}{2}\log^2\frac{1}{2} = 2\log 2 - 2 + \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

$$-\frac{1}{2}\log^2\frac{1}{2} =$$

$= 2\log 2 - 1 + (\log 2)^2.$