4.4 La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = e^{|\mathbf{x}|}$$

è derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n$, tranne l'origine. Infatti, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ e ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\right) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\left(e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\right) = \frac{x_i e^{|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|},$$

espressione che perde significato per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In questo punto si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{|x_i|}\right)_{/x_i=0} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{|h|}-1}{h}, \text{ che non esiste.}$$

4.2 Piano tangente

Per funzioni di una variabile, definire la derivata di una funzione equivale sostanzialmente a definire la retta tangente al suo grafico. Per una funzione di *due* variabili il problema analogo è definire il *piano tangente al grafico della funzione*. Ci proponiamo ora di determinare tale piano. Questo problema geometrico sarà la strada naturale per arrivare alla nozione generale di *funzione differenziabile*, concetto centrale in questo paragrafo.

Lasciamoci guidare dall'intuizione geometrica. Se sezioniamo il grafico di $z = f(x, y)$ con il piano verticale $y = y_0$, troveremo una curva in questo stesso piano, descritta dall'equazione $z = f(x, y_0)$. La retta r_1 tangente a tale curva in x_0 starà anche sul piano tangente che cerchiamo; ripetendo la stessa costruzione lungo il piano verticale $x = x_0$, troviamo una seconda retta r_2 passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e appartenente al piano tangente: poiché in $\mathbb{R}^3$ due rette intersecantesi individuano un unico piano, questo dovrebbe essere il piano tangente (fig. 3.10).

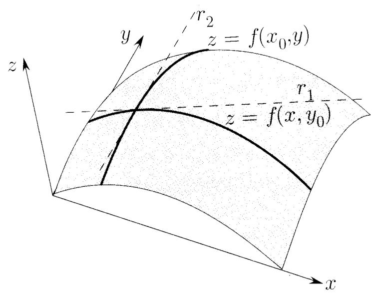

Figura 3.10.

L'equazione della retta r_1 nel piano $y = y_0$ è:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0).$$

La stessa retta, considerata nello spazio (x, y, z) anziché nel piano $y = y_0$, è individuata dal *sistema*:

$$\text{(4.3)} \qquad \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0. \end{cases}$$

Analogamente, la retta r_2 è individuata dal sistema:

$$\text{(4.4)} \qquad \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0. \end{cases}$$

Il piano che contiene entrambe le rette è:

$$\text{(4.5)} \qquad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

come si verifica immediatamente (ogni punto (x, y, z) che soddisfa (4.3) o (4.4) soddisfa anche (4.5)). Possiamo affermare che la (4.5) è l'*equazione del piano tangente al grafico di* $z = f(x, y)$ *nel punto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$? Prima di rispondere, vediamo un paio di esempi.

Esempi

4.5 Determiniamo il piano tangente al grafico di $z = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2; \quad f(1,1) = 2;$$

l'equazione è:

$$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

cioè

$$z = 2x + 2y - 2.$$

Dal grafico in figura 3.11, sembra ragionevole considerare questo piano come "tangente".

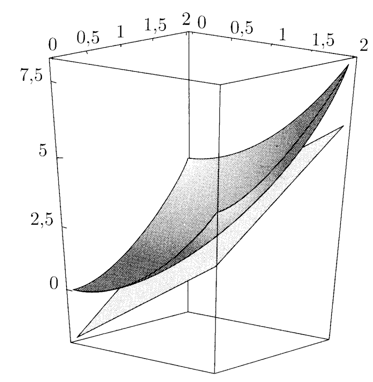

Figura 3.11. Grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$ e del piano $z = 2x + 2y - 2$.

4.6 Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

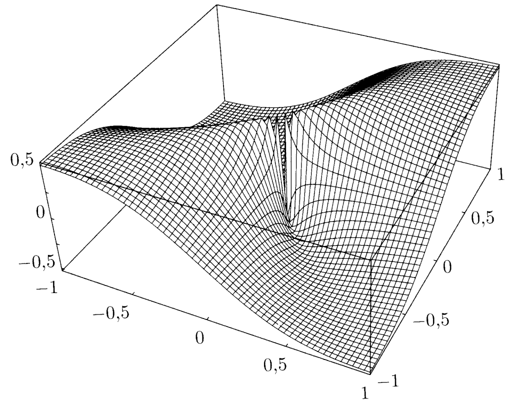

Figura 3.12. Grafico di $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

La funzione è identicamente nulla sugli assi coordinati, perciò, calcolando le derivate parziali di f nell'origine mediante la definizione, vediamo subito che esse esistono e sono nulle. Poiché anche f è nulla in $(0,0)$, la (4.5) coincide col piano $z = 0$. Uno sguardo al grafico di $f(x,y)$ in figura 3.12 mostra però che questo piano non ha il diritto di chiamarsi "tangente": la funzione non è neppure continua nell'origine!

Occorre ora una riflessione. L'equazione (4.5) si può scrivere ogni volta che $f(x,y)$ è derivabile; il piano che essa individua, per costruzione, contiene le rette tangenti alle sezioni che il grafico di $f(x,y)$ forma con i piani $x = x_0$, $y = y_0$. Se questo piano è il piano tangente, deve contenere anche tutte le rette tangenti alle altre curve che si ottengono sezionando il grafico con un piano verticale qualsiasi. Purtroppo, però, non c'è garanzia che questo accada nella sola ipotesi di derivabilità di $f(x,y)$: in altre parole, il procedimento che abbiamo seguito individua il piano tangente *nell'ipotesi che questo ci sia*; potrebbe però non esserci, come accade nell'esempio 4.6.

4.3 Differenziabilità e approssimazione lineare

Il caso bidimensionale

L'ultimo esempio mostra un problema tipico del calcolo differenziale in più variabili, che non ha analogo nel caso unidimensionale: mentre in una variabile la derivabilità è equivalente all'esistenza della retta tangente e implica la continuità, in due (o più) variabili *la sola derivabilità* (nel senso della definizione precedente) *non implica né la continuità né l'esistenza del piano tangente*.

Qual è allora la proprietà di f che garantisce che il piano (4.5) sia "realmente" tangente? Per rispondere, basta osservare qual è la proprietà fondamentale della retta tangente nel caso unidimensionale. Questa è espressa dalla relazione:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \text{ per } h \to 0.$$

L'incremento della funzione coincide al primo ordine con il *differenziale*, cioè con l'incremento calcolato lungo la retta tangente; i due incrementi differiscono per infinitesimi di ordine superiore rispetto all'incremento h della variabile indipendente[9].

Il concetto analogo è quello di *differenziabilità in più variabili*: l'incremento di f è uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente, più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento (h,k) delle variabili indipendenti. In formule:

(4.6)

$$\begin{aligned} &f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad \text{per } (h,k) \to (0,0)\,. \end{aligned}$$

Nella formula precedente, il primo membro rappresenta l'incremento della funzione; i primi due addendi del secondo membro rappresentano l'incremento calcolato lungo il piano tangente; l'ultimo addendo costituisce l'errore che si commette valutando l'incremento di f come incremento lungo il piano tangente. Il simbolo $o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ indica, per definizione, una funzione di (h,k) tale che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Nel caso particolare $(x_0,y_0) = (0,0)$, la (4.6) assume la forma:

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{4.7}$$

per $(x,y) \to (0,0)$.

Se la (4.6) è verificata, diremo che f è *differenziabile* in (x_0,y_0). La condizione (4.6) garantisce che il piano (4.5) sia tangente al grafico di f (anzi, è una definizione precisa di cosa significhi piano tangente). Il piano tangente è dunque il piano (4.5), ma *solo se* la (4.6) è verificata; altrimenti non esiste.

Il caso n-dimensionale

Diamo ora la definizione generale di differenziabilità per una funzione di n variabili:

Definizione 3.12 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Diremo che f è *differenziabile* in $\mathbf{x}_0$ se esiste un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \tag{4.8}$$

Nella formula precedente, il vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ è l'incremento della variabile indipendente e $\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}$ il prodotto scalare dei due vettori; la funzione f è definita nel punto $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, almeno quando $|\mathbf{h}|$ è abbastanza piccolo, perché per ipotesi il punto $\mathbf{x}_0$ è interno al dominio di definizione di f. Più esplicitamente, la (4.8) significa che:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0. \tag{4.9}$$

[9] Si veda il volume 1, capitolo 4, paragrafo 7.1.