Corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 21.06.2012

COGNOME .... NOME .... Matr. ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**. Non consegnare brutte copie, **non saranno valutate**.

1) Risolvere il sistema $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ con le condizioni iniziali $x(0) = -1$, $y(0) = 3$. (6)

Risposta: $x(t) = e^{-t} - 2e^{-6t}$, $y(t) = 2e^{-t} + e^{-6t}$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) - stabilire se è continua e differenziabile nell'origine; (2+2)
b) - studiare gli eventuali punti stazionari; (6)
c) - determinare il codominio. (2)

Risposte:
a) È continua ma non differenziabile nell'origine; **b)** i punti stazionari $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ sono di massimo assoluto e i punti $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ sono di minimo assoluto; **c)** il codominio è $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$.

3) Calcolare l'integrale doppio $\iint_D |xy| \, dxdy$ dove

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(6)

Risposta: L'integrale vale $\frac{5}{24}$.

4) Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x^2z, y - z, 2xy)$ uscente dalla superficie ottenuta ruotando la curva $y = \cos z$, $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intorno all'asse z. (8)

Risposta: Il flusso vale $\frac{\pi^2}{2}$.

Il sottoscritto .... ai sensi della vigente legge sulla privacy, autorizza la pubblicazione dell'esito di questa prova scritta nel sito internet dell'Università Politecnica delle Marche.

Ancona, 21 Giugno 2012 Firma..

1) Ponendo $F_1(s)=\mathcal{L}[x(t)]$ e $F_2(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, si ha

$$\begin{cases} sF_1(s)+1 = -5F_1(s)+2F_2(s) \\ sF_2(s)-3 = 2F_1(s)-2F_2(s) \end{cases} \to \begin{cases} F_2(s)=\dfrac{(s+5)F_1(s)+1}{2} \\ (s+2)F_2(s)=3+2F_1(s) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \dots \\ (s+2)\dfrac{(s+5)F_1(s)+1}{2} = 3+2F_1(s) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \dots \\ (s^2+7s+10)F_1+s+2 = 6+4F_1(s) \end{cases} \to \begin{cases} \dots \\ (s^2+7s+6)F_1 = 4-s \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \dots \\ F_1 = \dfrac{4-s}{(s+6)(s+1)} \end{cases} \to \begin{cases} F_2(s)=\dfrac{(s+5)(4-s)}{2(s+6)(s+1)}+\dfrac{1}{2} \\ F_1(s)= -\dfrac{2}{s+6}+\dfrac{1}{s+1} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} F_2(s)=\dfrac{6s+26}{2(s+6)(s+1)}=\dfrac{3s+13}{(s+6)(s+1)} \\ F_1= -\dfrac{2}{s+6}+\dfrac{1}{s+1} \end{cases} \to \begin{cases} F_2=\dfrac{1}{s+6}+\dfrac{2}{s+1} \\ F_1= -\dfrac{2}{s+6}+\dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

quindi la soluzione è $x(t)=-2e^{-6t}+e^{-t}$, $y(t)=e^{-6t}+2e^{-t}$.

2) a) Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\cancel{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{\rho}}e^{-\rho^2}=0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Inoltre $|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\le \rho e^{-\rho^2}\xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ poiché $|\cos^2\theta-\sin^2\theta| = |\cos 2\theta|\le 1$. Quindi il limite è uniforme rispetto a θ e la funzione è continua nell'origine.

Osserviamo ora che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\sqrt{x^2}}e^{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}e^{-x^2}\ \nexists$ poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}e^{-x^2}=1$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}e^{-x^2}=-1$

quindi f non è derivabile rispetto ad x nell'origine e pertanto non è differenziabile.

b) $\forall (x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$f_x = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} e^{-(x^2+y^2)} - 2x e^{-(x^2+y^2)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= e^{-(x^2+y^2)} \left[\frac{2x(x^2+y^2) - x(x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{2x^3-2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] =$$

$$= \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \left(2x^3+2xy^2-x^3+xy^2-(2x^3-2xy^2)(x^2+y^2) \right) =$$

$$= \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \left(x^3+3xy^2-2x^5-\cancel{2x^3y^2}+\cancel{2x^3y^2}+2xy^4 \right) =$$

$$= \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot x\left(x^2+3y^2-2x^4+2y^4\right)$$

Dato che $f(y,x) = -f(x,y)$ si ha

$$f_y = -\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \, y\left(y^2+3x^2-2y^4+2x^4\right)$$

Quindi i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x\left(x^2+3y^2-2x^4+2y^4\right)=0 \\ y\left(y^2+3x^2-2y^4+2x^4\right)=0. \end{cases}$$

Se $x=0$, dalla seconda equazione si ricava $y^3(1-2y^2)=0 \to y=0$, $y=\pm\frac{\sqrt2}{2}$;

mentre se $y=0$ dalla prima equazione si ricava $x^3(1-2x^2)=0 \to x=0$, $x=\pm\frac{\sqrt2}{2}$. Gli altri punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2+3y^2 = 2x^4-2y^4 \\ y^2+3x^2 = 2y^4-2x^4 \end{cases}$

quindi sommando si ha $4(x^2+y^2)=0 \iff x=y=0$.

Scartando l'origine, dove f non è derivabile, i punti stazionari sono $P_1=\left(\frac{\sqrt2}{2},0\right)$, $P_2=\left(-\frac{\sqrt2}{2},0\right)$ $P_3=\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$ e $P_4=\left(0,-\frac{\sqrt2}{2}\right)$. Poiché f è pari sia rispetto ad x che rispetto ad y, P_1 e P_2 sono dello stesso tipo, così come P_3 e P_4. Inoltre $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$ e $f(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

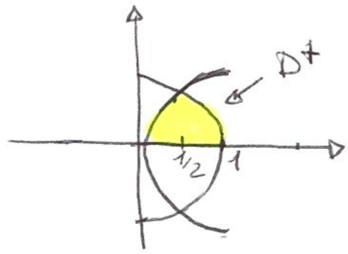
Osserviamo ora che $\lim_{\rho\to+\infty} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=$

$$=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\rho^{\cancel{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{\rho}}e^{-\rho^2}=0,\ \text{con}\ \left|\frac{\rho^{\cancel{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{\rho}}e^{-\rho^2}\right|\le$$

$\le \rho e^{-\rho^2}\xrightarrow[\rho\to+\infty]{} 0$ $\forall\theta\in[0,2\pi]$, quindi $\exists \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=0$.

Dato che f assume sia valori positivi che negativi, ammette massimo e minimo assoluti. Per confronto, essendo $f(0,0)=0$, deduciamo che P_1 e P_2 sono punti di massimo assoluto, P_3 e P_4 sono di minimo assoluto.

c) Il codominio è $\left[-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$.



3) Dato che il dominio è simmetrico rispetto all'asse x e la funzione è pari rispetto ad y, si ha

$$\iint_D |xy|\,dx\,dy = 2\iint_{D^+} xy\,dx\,dy \quad \text{dove } D^+=\{(x,y)\in D:\ y\ge 0\}$$

Le due circonferenze si intersecano nel punto $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ corrispondente all'angolo $\theta=\frac{\pi}{3}$. Quindi passando in coordinate polari si ottiene:

$$2\iint_{D^+} xy\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/3}d\theta\int_0^1(\rho^2\cos\theta\sin\theta)\rho\,d\rho+2\int_{\pi/3}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho^2\cos\theta\sin\theta)\rho\,d\rho$$

$$=2\int_0^{\pi/3}\cos\theta\sin\theta\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1d\theta+2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/3}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot16\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+8\left[-\frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}=\frac{3}{16}+\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{64}\,16}=\frac{10}{48}=\frac{5}{24}$$

Essendo una superficie chiusa possiamo usare il Teorema della divergenza. Dato che $\operatorname{div}(F) = 2xz+1$, il flusso uscente dalla superficie è dato da

$\iiint_E (2xz+1)\,dx\,dy\,dz$, dove E è la regione di spazio delimitata dalla superficie.

Integriamo per strati; ponendo $D_z = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq \cos z\}$ si ottiene

$$\iiint_E (2xz+1)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \iint_{D_z} (2xz+1)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos z} (2\rho\cos\theta z+1)\cdot\rho$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{2}{3}\rho^3\cos\theta z + \frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\cos z} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cos\theta\cos^3 z\cdot z + \frac{1}{2}\cos^2 z\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta\cos^3 z\cdot z + \frac{1}{2}\cos^2 z\cdot\theta\right]_0^{2\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 z\,dz =$$

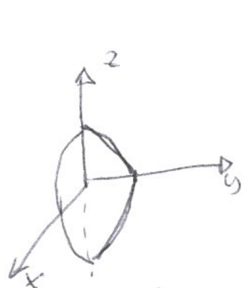
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 z\,dz = \cancel{2}\pi\left[\frac{z+\operatorname{sen} z\cos z}{\cancel{2}}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Oppure mediante la definizione di flusso:

una parametrizzazione della superficie è $\begin{cases} x = \cos t\cos\theta \\ y = \cos t\operatorname{sen}\theta \\ z = t \end{cases}$

per $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\theta\in[0,2\pi]$. Si ha

$$\varphi_t \wedge \varphi_\theta = \det\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\operatorname{sen}t\cos\theta & -\operatorname{sen}t\operatorname{sen}\theta & 1 \\ -\cos t\operatorname{sen}\theta & \cos t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= (-\cos t\cos\theta,\ -\cos t\operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen}t\cos t)$$

Per $t=0$ e $\theta=\frac{\pi}{2}$ (corrispondente al punto $(0,1,0)$) si ha

$\varphi_t\wedge\varphi_\theta = (0,-1,0)$, quindi $\nu = \varphi_t\wedge\varphi_\theta$ è entrante.

Allora, il flusso è dato da

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \Big[t\cdot \cos^2\theta\, \cancel{\cos^2 t \cdot \cos t\cos\theta} + (\operatorname{sen}\theta\cos t - t)\cos t \operatorname{sen}\theta +$$

funzioni dispari rispetto a t

$$+ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \cancel{\cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t\cos t}\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2\theta\cos^2 t - t\, \cancel{\operatorname{sen}\theta\cos t})\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

$$= \left[\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{t + \operatorname{sen} t\cos t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$