Corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 14.09.2012

COGNOME .... NOME .... Matr. ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**. Non consegnare brutte copie, **non saranno valutate**.

1) Studiare i massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2|y|e^{-x^2-y^2}.$$

(8)

Risposta: I punti degli assi x e y sono di minimo assoluto; i punti $(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono di massimo assoluto.

2) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \frac{x}{y+1}\,ds$, dove γ é la curva di equazioni parametriche $x = 1+\cos t$, $y = \sin t$, per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (7)

Risposta: $1 + \log 2$

3) Calcolare l'integrale doppio $\iint_D (y^2 - x^2)^2 e^{(x+y)^3}\, dxdy$ dove $D = \{(x, y) : |y| \leq 1 - |x|\}$. (8)

Risposta: L'integrale vale $\frac{1}{9}(e - \frac{1}{e})$.

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + \sin x.$$

(7)

Risposta: $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}(\sin x + \cos x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1) La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$, inoltre $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2|y|e^{-(x^2+y^2)}=0$, infatti passando a coordinate polari si ha $\lim_{\rho\to+\infty} \rho^3\cos^2\theta|\sin\theta|e^{-\rho^2}=0 \quad \forall\theta$ con $|\rho^3\cos^2\theta|\sin\theta|e^{-\rho^2}| \leq \rho^3 e^{-\rho^2} \to 0$ per $\rho\to+\infty$, quindi il limite è uniforme rispetto a θ. Osserviamo che $f(x,y)\geq 0 \quad \forall(x,y)$ e $f(x,y)=0 \iff x=0 \vee y=0$.

Quindi i punti degli assi x e y sono di minimo assoluto e la funzione ammette massimo assoluto.

Dato che f è pari rispetto a x e rispetto a y, possiamo limitarci a studiare i punti stazionari nel quadrante aperto $A=\{(x,y): x>0, y>0\}$ (i punti degli assi coordinati sono già stati classificati.

In A $f(x,y)=x^2y\,e^{-(x^2+y^2)}$, quindi

$$f_x = 2xy e^{-(x^2+y^2)} + x^2y\,e^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 2xy e^{-(x^2+y^2)}(1-x^2)$$

$$f_y = x^2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2y^2e^{-(x^2+y^2)} = x^2e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2)$$

Quindi $\nabla f=0 \iff \begin{cases} 2xy(1-x^2)=0 \\ x^2(1-2y^2)=0 \end{cases}$. Poiché stiamo studiando la funzione nel quadrante aperto $x>0, y>0$ si ha $\nabla f=0 \iff \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-2y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, quindi l'unico punto stazionario in A è il punto $P_1=(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Per la simmetria di f, anche i punti $P_2=(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_3=(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P_4=(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ sono stazionari e la funzione assume lo stesso valore in tali punti. Dato che f ammette massimo assoluto, necessariamente tali punti sono di massimo assoluto, con $f(P_i)=\frac{1}{2e^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt{e^3}}$

2) Per definizione si ha $\int_\gamma \frac{x}{y+1}\, ds = \int_0^{\pi/2} \frac{x(t)}{y(t)+1}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$.

Dato che $x'(t) = -\sin t$ e $y'(t)=\cos t$, si ha $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=1$ quindi si ottiene $\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\,dt$. Passando alle formule parametriche $\sin t = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$ e $\cos t = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$ con $\tau=\tan\frac{t}{2}$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1+\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}{1+\frac{2\tau}{1+\tau^2}}\,\frac{2}{1+\tau^2}\,d\tau = \int_0^1 \frac{1+\cancel{\tau^2}+1-\cancel{\tau^2}}{1+\tau^2+2\tau}\cdot\frac{2}{1+\tau^2}\,d\tau = 4\int_0^1\frac{1}{(1+\tau)^2(1+\tau^2)}\,d\tau$$

Osserviamo che $\frac{1}{(1+\tau)^2(1+\tau^2)} = \frac{a}{1+\tau}+\frac{b\tau+c}{1+\tau^2}+\frac{d}{d\tau}\frac{d}{1+\tau} =$

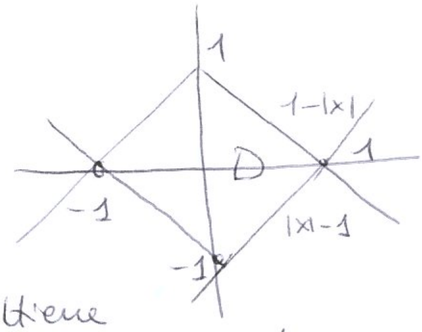
$$= \frac{a}{1+\tau}+\frac{b\tau+c}{1+\tau^2}-\frac{d}{(1+\tau)^2} \iff a=\frac{1}{2},\ b=d=-\frac{1}{2},\ c=0$$

quindi l'integrale diventa $4\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+\tau}-\frac{1}{2}\frac{\tau}{1+\tau^2}+\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau+1}\right)$

$$= \left[2\log(\tau+1)-\log(\tau^2+1)-2\frac{1}{\tau+1}\right]_0^1 = \log 2 - 1 + 2 = \log 2+1$$

3) Disegniamo prima l'insieme D: $|y|\le 1-|x| \iff$

$|x|-1\le y\le 1-|x|$



Proviamo allora con il cambio di variabile

$u=y-x$ $\quad v=y+x$. Si ottiene

$\begin{cases} y=\frac{u+v}{2}\\ x=\frac{v-u}{2}\end{cases}$, da cui $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ e $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$.

Nelle nuove variabili si ha $D=\{(u,v): -1\le u\le 1, -1\le v\le 1\}$ cioè $D=[-1,1]\times[-1,1]$. L'integrale diventa

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 u^2v^2e^{v^3}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2\,du\int_{-1}^1 v^2e^{v^3} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^1\cdot\left[\frac{1}{3} e^{v^3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{18}\cdot 2\cdot\left(e-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{9}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

4) È un'equazione lineare non omogenea. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2-5\lambda+6=0$ che ha le radici $\lambda=2$ e $\lambda=3$. Quindi l'integrale dell'equazione omogenea associata è

$$S_0=\left\{ c_1 e^{2x}+c_2 e^{3x} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione non omogenea usiamo il metodo delle somiglianze. Poniamo $\bar{y}(x)= Kxe^{2x} + a \operatorname{sen} x + b\cos x$.

Si ha $\bar{y}'(x)= Ke^{2x}+2Kxe^{2x}+a\cos x - b\operatorname{sen} x$ e

$\bar{y}''(x)= 2Ke^{2x}+2Ke^{2x}+4Kxe^{2x}-a\operatorname{sen}x - b\cos x$.

Quindi $\bar{y}$ è soluzione se e solo se

$$4Ke^{2x}+\cancel{4Kxe^{2x}}-a\operatorname{sen}x-b\cos x-5Ke^{2x}-\cancel{10Kxe^{2x}}-5a\cos x$$
$$+5b\operatorname{sen}x+\cancel{6Kxe^{2x}}+6a\operatorname{sen}x+6b\cos x = e^{2x}+\operatorname{sen}x$$

$$\Longleftrightarrow \quad -Ke^{2x}+5(a+b)\operatorname{sen}x+5(b-a)\cos x = e^{2x}+\operatorname{sen}x$$

$$\Longleftrightarrow \quad K=-1 \text{ e } \begin{cases} 5a+5b=1 \\ 5b-5a=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad K=-1,\ a=b=\frac{1}{10}$$

quindi $\bar{y}(x)= -xe^{2x}+\frac{1}{10}(\operatorname{sen}x+\cos x)$ e l'integrale generale è

$$S_g=\left\{ c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-xe^{2x}+\frac{1}{10}(\operatorname{sen}x+\cos x);\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$