Corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 12.06.2012

COGNOME .... NOME .... Matr. ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**. Non consegnare brutte copie, **non saranno valutate**.

1) Risolvere il problema di Cauchy : $\begin{cases} y'' + y = x + \sin x \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1 \end{cases}$ (6)

Risposta: $y(x) = 2\cos x - \frac{3}{2}\sin x + x - \frac{1}{2}x\cos x$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) - stabilire se è differenziabile; (3)
b) - studiare gli eventuali punti stazionari; (6)
c) - determinare il codominio. (2)

Risposte: a) È differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$; **b)** i punti stazionari $(0,0), (\pm1,0), (0,\pm1)$ sono punti sella, i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}})$ sono di massimo locale, i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}})$ sono di minimo locale; **c)** il codominio è $\mathbb{R}$.

3) Dopo aver disegnato la regione di piano D delimitata dalle curve polari $\rho = 1$ e $\rho = 1 + \cos\theta$, per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
a) calcolarne l'area (3)
b) calcolare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse x la parte di D contenuta nel primo quadrante. (5)

Risposte: a) l'area vale $2 + \frac{\pi}{4}$; il volume vale $\frac{11}{6}\pi$.

4) Dopo aver stabilito se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-1} + y^2, \ \frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy\right)$$

è conservativo nel dominio $D := \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$, calcolare il lavoro del campo lungo l'arco di ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 4$ contenuto nel primo quadrante, orientato in senso antiorario. (4+3)

Risposta: Il campo è conservativo in D con potenziali è $U(x,y) = \log(x^2+y^2-1) + xy^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$. Il lavoro vale $-\log 3$.

1) L'equazione differenziale è lineare non omogenea a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2+1=0$, le cui soluzioni sono $\lambda=\pm i$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$S_0 = \{ c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

Usiamo il metodo della somiglianza per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$\bar{y}(x) = ax+b + x(c \operatorname{sen} x + d\cos x)$$

$$\bar{y}'(x) = a + c\operatorname{sen} x + d\cos x + cx\cos x - dx\operatorname{sen} x$$

$$\bar{y}''(x) = c\cos x - d\operatorname{sen} x + c\cos x - cx\operatorname{sen} x - d\operatorname{sen} x - dx\cos x \ ;$$

quindi $\bar{y}''(x) + \bar{y}(x) = x + \operatorname{sen} x \iff$

$$2c\cos x - 2d\operatorname{sen} x - \cancel{cx\operatorname{sen} x} - \cancel{dx\cos x} + ax+b + \cancel{cx\operatorname{sen} x} + \cancel{dx\cos x} =$$

$$= x + \operatorname{sen} x \iff a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-\tfrac{1}{2}.$$

Allora $\bar{y}(x) = x - \frac{1}{2}x\cos x$ e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$S_g = \{ c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + x - \tfrac{1}{2}x\cos x \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 + 1 - \frac{1}{2} = -1 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$ Quindi la

soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 2\cos x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} x + x - \frac{1}{2}x\cos x$$

2) La funzione è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, quindi è differenziabile in ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ per il Teorema del differenziale. Dato che $f(x,0) = f(0,y) = 0 \quad \forall x, \forall y$, la funzione è derivabile nell'origine con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

passando in coordinate polari si ha $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \log(\rho^2)}{\rho} = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$, con $|\rho \cos\theta \operatorname{sen}\theta \log(\rho^2)| \le \rho \log(\rho^2) \to 0$ per $\rho \to 0$, quindi il limite è uniforme rispetto a θ e la funzione è differenziabile anche nell'origine, che è un punto stazionario. Troviamo ora gli altri punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = y \log(x^2+y^2) + xy \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = x \log(x^2+y^2) + xy \dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y\left(\log(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \\ x\left(\log(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

. Se $y=0$ dalla seconda equazione si ricava $x \log(x^2) = 0 \iff x=0$ oppure $x = \pm 1$. Analogamente se $x=0$ dalla prima equazione si ricava $y \log(y^2) = 0 \iff y=0$ oppure $y = \pm 1$.

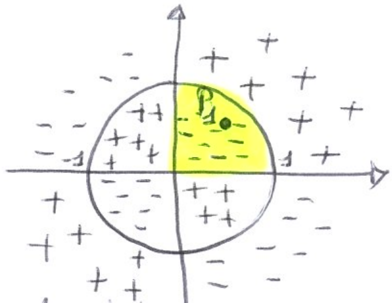
Quindi, oltre all'origine, anche i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ sono stazionari. Gli altri punti stazionari sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \log(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{x^2+y^2}} = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{x^2+y^2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ x = \pm y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \log(2y^2) + 1 = 0 \\ x = \pm y \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 = \dfrac{1}{e} \\ x = \pm y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2e}} \\ x = \pm y \end{cases}$$

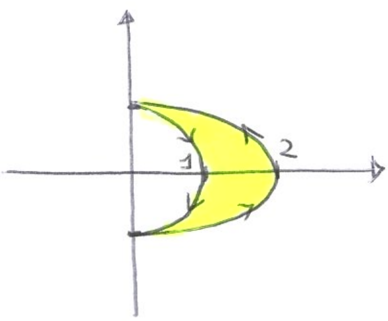
, quindi sono stazionari anche i punti $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

Dato che $\log(x^2+y^2) > 0 \iff x^2+y^2 > 1$, tenendo conto del segno della funzione si deduce che l'origine e i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ sono punti sella. Consideriamo ora il punto $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$. Applicando il Teorema di Weierstrass nel settore circolare $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ nel primo quadrante, la funzione ristretta ad S ammette massimo assoluto uguale a 0, assunto lungo tutto il bordo di S, e minimo assoluto assunto necessariamente all'interno di S. Dato che P_1 è l'unico punto stazionario all'interno di S, è il punto di minimo assoluto della restrizione della funzione ad S, e quindi è punto di minimo locale per f. Per simmetria $(f(-x,-y) = f(x,y))$ anche $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ è punto di minimo locale e ancora per simmetria $(f(x,-y) = -f(x,y)$ e $f(-x,y) = -f(x,y))$ i punti $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ e $P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sono di massimo locale.



Infine, dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x,x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \log(2x^2) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x,-x) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 \log(2x^2) = -\infty$, il codominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$.

3) L'area è data da:



$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1^2\, d\theta =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi/2} (1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\, d\theta - \frac{\pi}{2} = \left[\theta + \frac{\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} + 2 - \cancel{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}$$

Oppure (in coordinate cartesiane): $\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ e

$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$, si ottiene $A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dy - y\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[(1+\cos\theta)\cos\theta\,(\cos\theta + \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) - (1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,(-\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\Big]d\theta$$

$$- \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta\,(-\mathrm{sen}\,\theta)\big]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \cos^2\theta)(\cos\theta + \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) + (\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)(\mathrm{sen}\,\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)$$

$$- \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos^2\theta + \cos^3\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta - \cancel{\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta} -$$

$$- \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta + \cancel{\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta} + 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\Big)d\theta - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + 2\cos^3\theta + (\cos^4\theta + \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta) + 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\Big)d\theta - \frac{\pi}{2} =$$

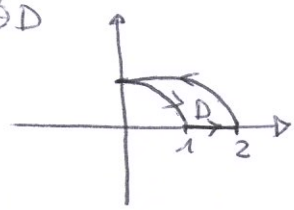
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + 2\cos^3\theta + \cos^2\theta(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) + 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\Big)d\theta - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + 2\cos\theta(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) + \cos^2\theta\Big)d\theta - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta - \frac{\pi}{2} = \Big[\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2 + \frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}$$

Il volume generato dalla rotazione intorno all'asse x è dato da $2\pi\iint_D y\,dx\,dy$, che si può scrivere $2\pi\int_{\partial D} xy\,dy$ per le formule di Green. Si ottiene:



$$2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right]d\theta -\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta+\int_1^2\cancel{t\cdot 0\,dt}\right)=$$

$$2\pi\left(\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\cos\theta\sin\theta\,(\cos\theta+2\cos^2\theta-1)\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\right)=$$

$$2\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)(\cos^2\theta+2\cos^3\theta-\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta+\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta+\cos^4\theta+2\cos^3\theta+2\cos^3\theta+2\cos^5\theta+4\cos^4\theta-\cos\theta-\cos^3\theta-2\cos^2\theta)$$

$$\cdot\sin\theta\,d\theta-\frac{2\pi}{3}=2\pi\int_0^{\pi/2}(2\cos^5\theta+5\cos^4\theta+3\cos^3\theta-\cos^2\theta-\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-\frac{2}{3}\pi=\left[\frac{1}{3}\cos^6\theta-\cos^5\theta-\frac{3}{4}\cos^4\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2}-\frac{2}{3}\pi=$$

$$=2\pi\left(\cancel{\frac{1}{3}}+1+\frac{3}{4}-\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi=\frac{11}{12}\cdot 2\pi=\frac{11}{6}\pi$$

Oppure: applicando l'altra formula di Green si ha:

$$-\cancel{2}\pi\int_{\partial D}\frac{y^2}{\cancel{2}}\,dx=-\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\left[-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta\right]d\theta$$

$$+\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta-\cancel{\int_1^2 t\cdot 0\,dt}$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\,d\theta-\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta=$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, (1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)(1+2\cos\theta)\, d\theta - \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, (1-\cancel{\cos^2\theta}+\cancel{\cos^2\theta}-\cos^4\theta+2\cos\theta-2\cos^3\theta)(1+2\cos\theta)\, d\theta \; +$$

$$+ \; \pi \left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, (1 + 2\cos\theta - \cos^4\theta - 2\cos^5\theta + 2\cos\theta + 4\cos^2\theta - 2\cos^3\theta - 4\cos^4\theta)$$

$$+\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, (1+4\cos\theta+4\cos^2\theta-2\cos^3\theta-5\cos^4\theta-2\cos^5\theta)\, d\theta - \frac{2}{3}\pi$$

$$= \pi \left[-\cos\theta - 2\cos^2\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{2}\cos^4\theta + \cos^5\theta + \frac{1}{3}\cos^6\theta\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{3}\pi$$

$$= \pi\left(\cancel{1}+2+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\cancel{1}-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\pi = \pi\left(\frac{3}{2}+1-\frac{2}{3}\right) = \pi\,\frac{11}{6}$$

4) Osserviamo che $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - \frac{4xy}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ quindi il campo è irrotazionale; ma il dominio non è semplicemente connesso. Valutiamo il lavoro lungo la circonferenza di equazione $x^2+y^2=2$; si ottiene $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$

e il lavoro vale $\int_0^{2\pi}\left[\left(2\sqrt{2}\cos t + 2\,\mathrm{sen}^2 t\right)(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t)+\left(2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t+4\,\mathrm{sen}\,t\cos t\right)\right.$
$\left.\cdot\sqrt{2}\cos t\right]dt = \int_0^{2\pi}\left(-4\,\mathrm{sen}\,t\cancel{\cos t} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^3 t + 4\,\mathrm{sen}\,t\cancel{\cos t} + 4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\cos^2 t\right)dt =$
$=0$ perché la funzione integranda è dispari e periodica di periodo 2π. Quindi, come applicazione della formula di Stokes, deduciamo che il campo è conservativo.

$$U(x,y) = \int\left(\frac{2x}{x^2+y^2-1} + y^2\right)dx = \log(x^2+y^2-1) + xy^2 + f(y) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \iff \frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy + f'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy \iff f'(y)=0$$

$\iff f(y) = k$; quindi $U(x,y) = \log(x^2+y^2-1) + xy^2$.

Il lavoro lungo l'arco di ellisse vale $U(0,\sqrt{2}) -$
$-U(2,0) = 0 - \log 3 = -\log 3$.