Corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 10.10.2012

COGNOME .... NOME ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**.

1) Determinare il codominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{4+x^2+y^2}$. (7)

Risposta: Il codominio è l'intervallo $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

2) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y del dominio

$$D = \{(x,y) : x \geq 0,\ 2x^2 \leq y \leq 2,\ x^2 + y^2 \geq 4y - 3\}.$$

(8)

Risposta: Il volume vale $\frac{17}{48}\pi$.

3) Studiare e disegnare la curva di equazione polare $\rho = e^{\sin\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$. Determinare inoltre l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(1,0)$ (7)

Risposta (grafico)

4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \log x \\ y(1) = \frac{1}{4}e,\ y'(1) = -\frac{3}{4}e. \end{cases}$$

(8)

Risposta: La soluzione è $y(x) = e^x(1 + \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2)$

1) La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$ quindi il codominio è un intervallo.

Osserviamo che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=0$, infatti $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1+\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{4+\rho^2} = 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$, con $\left|\frac{1+\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{4+\rho^2}\right| \le \frac{1+2\rho}{4+\rho^2} \to 0$ per $\rho\to+\infty$, quindi il limite è uniforme rispetto a θ.

Dato che la funzione assume sia valori positivi che negativi, la funzione ammette massimo e minimo assoluti.

$$f_x = \frac{4+x^2+y^2-2x(1+x+y)}{(4+x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2x-2xy+4}{(4+x^2+y^2)^2}$$; per simmetria ($f(y,x)=f(x,y)$) si ha $f_y = \frac{x^2-y^2-2y-2xy+4}{(4+x^2+y^2)^2}$. Quindi

$$\nabla f=0 \iff \begin{cases} y^2-x^2-2x-2xy+4=0 \\ x^2-y^2-2y-2xy+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{2}(y^2-x^2)+\cancel{2}(y-x)=0 & (1^a-2^a) \\ x^2-y^2-2y-2xy+4=0 \end{cases}$$

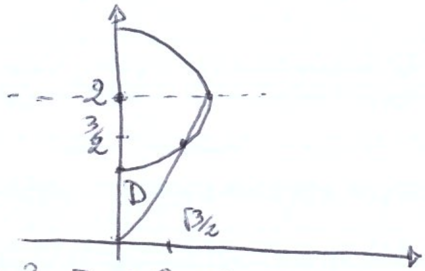
$$\iff \begin{cases} (y-x)(y+x+1)=0 \\ x^2-y^2-2y-2xy+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{array}{l} y=x \\ y=-x-1 \end{array} \\ x^2-y^2-2y-2xy+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ -2y-2y^2+4=0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2-(x+1)^2+2x+2+2x^2+2x+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ (y+2)(y-1)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{y=-x-1} \\ \cancel{2x^2+2x+5=0} \end{cases} \ \Delta<0$$

$$\iff \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ x=-2 \end{cases}$$ quindi la funzione ha due punti stazionari: $P_1=(1,1)$, $P_2=(-2,-2)$. Dato che $f(1,1)=\frac{1}{2}$ e $f(-2,-2)=-\frac{1}{4}$, il massimo di f è $\frac{1}{2}$, e il minimo è $-\frac{3}{4}$.

Il codominio è $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

2) Intersechiamo la circonferenza di centro $(0,2)$ e raggio 1 con la parabola $y=2x^2$, per $x\geq 0$:



$$\begin{cases} x^2+y^2-4y+3=0 \\ y=2x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y}{2}+y^2-4y+3=0 \\ y=2x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2-7y+6=0 \\ y=2x^2 \end{cases}$$

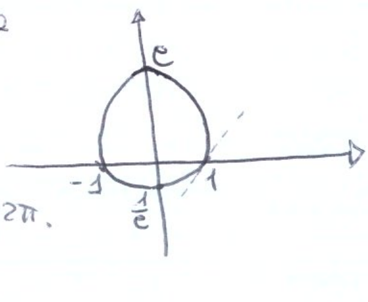
$$\iff \begin{cases} y_1=\frac{3}{2}, \ y_2=2 \\ x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, \ x_2=1 \end{cases}$$ quindi per $0\leq x\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha

$2x^2\leq y\leq 2-\sqrt{1-x^2}$. Usando il Teorema di Guldino si ha $V=2\pi\iint_D x\,dx\,dy=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/2}dx\int_{2x^2}^{2-\sqrt{1-x^2}}x\,dy=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(x(2-\sqrt{1-x^2})-2x^3\right)dx=$

$=\int_0^{\sqrt{3}/2}2\pi\left(2x-x\sqrt{1-x^2}-2x^3\right)dx=2\pi\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(2x+\frac{1}{2}(-2x\sqrt{1-x^2})-2x^3\right)dx=$

$2\pi\left[x^2+\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{2}x^4\right]_0^{\sqrt{3}/2}=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{24}-\frac{9}{32}-\frac{1}{3}\right)2\pi=\frac{17}{96}\cdot 2\pi=\frac{17}{48}\pi$

3) La curva è chiusa perché $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $\rho(0)=\rho(2\pi)=1$. Inoltre è semplice perché $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $\rho(\theta)\neq 0$ $\forall\theta$; infine è regolare perché essendo $\rho(\theta)\neq 0$ $\forall\theta$ si ha $\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2\neq 0$ $\forall\theta$. Per determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(1,0)$, osserviamo che tale punto corrisponde a $\theta=0$ (o $\theta=2\pi$) e posto $x(\theta)=e^{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta$, $y(\theta)=e^{\operatorname{sen}\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta$, si ha $x'(\theta)=e^{\operatorname{sen}\theta}(\cos^2\theta-\operatorname{sen}\theta)$ e $y'(\theta)=e^{\operatorname{sen}\theta}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos\theta)$; da cui $x'(0)=1$ e $y'(0)=1$. Pertanto la retta tangente ha equazione $\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}$, cioè $y=x-1$. Infine per disegnare la curva osserviamo che $\rho(\theta)$ cresce da 1 a e se $0\leq\theta\leq\pi/2$, decresce da e ad $\frac{1}{e}$ se $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi$, e infine cresce da $\frac{1}{e}$ a 1 se $\frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi$.



4) È un'equazione differenziale lineare non omogenea. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2-2\lambda+1$ che ha la radice $\lambda=1$ doppia. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$S_0=\{c_1e^x+c_2xe^x;\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione non omogenea usiamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (in questo caso non si può usare la somiglianza)

$$\begin{cases}\lambda_1 \cancel{e^x}+\lambda_2 x\cancel{e^x}=0\\ \lambda_1\cancel{e^x}+\lambda_2\cancel{e^x}+\lambda_2 x\cancel{e^x}=\cancel{e^x}\log x\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-\lambda_2 x\\ \lambda_2=\log x\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-x\log x\\ \lambda_2=\log x\end{cases}$$

quindi $c_1(x)=\int\lambda_1(x)dx=\int -x\log x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\log x-\int-\frac{1}{2}x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}dx$
$=-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2$ e $c_2(x)=\int\log x\,dx=x\log x-x.$

Allora un integrale particolare dell'equazione non omogenea è $e^x(-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+x^2\log x-x^2)=x^2e^x(\frac{1}{2}\log x-\frac{3}{4})$

e l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$S_g=\{c_1e^x+c_2xe^x+x^2e^x(\tfrac{1}{2}\log x-\tfrac{3}{4});\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$$

Dato che $y'(x)=c_1e^x+c_2(x+1)e^x+(2x+x^2)e^x(\frac{1}{2}\log x-\frac{3}{4})+x^2e^x\cdot\frac{1}{2x}$, si ha $y(1)=(c_1+c_2-\frac{3}{4})e$ e $y'(1)=(c_1+2c_2-\frac{9}{4}+\frac{1}{2})e$, quindi imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases}(c_1+c_2-\frac{3}{4})\cancel{e}=\frac{1}{4}\cancel{e}\\ (c_1+2c_2-\frac{7}{4})\cancel{e}=-\frac{3}{4}\cancel{e}\end{cases}\iff\begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1+2c_2=1\end{cases}\iff\begin{cases}c_1=1\\ c_2=0\end{cases}$$

quindi la soluzione è

$$y(x)=e^x\left(1+\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{3}{4}x^2\right)$$