Corso di laurea in Ingegneria Biomedica

Prova scritta di Analisi Matematica 2 del 09.07.2012

COGNOME .... NOME ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**.

1) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1-y^2}{4y\sqrt[3]{x}} \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}$ (6)

Risposta: La soluzione è $y(x) = \sqrt{1 + e^{\frac{3}{4}(1-\sqrt[3]{x^2})}}$, definita per $x > 0$.

par

2) Data la curva di equazioni parametriche $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \cos t \sin t$, per $t \in [0, \pi]$, stabilire se è semplice, chiusa, regolare e disegnarla. Calcolare inoltre la lunghezza della curva e l'area della regione da essa delimitata. (6+2+3)

Risposte: La curva è semplice, chiusa, regolare. La lunghezza è π e l'area della regione delimitata dalla curva vale $\frac{\pi}{4}$. (N.B. La curva è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{1}{2}$)

3) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_D \frac{|x|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, ove $D := \{(x,y) : y \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$. (6)

Risposta: L'integrale vale $e^2 - 2e + 1$.

4) Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(x\tan(x^2+y^2),\ y\tan(x^2+y^2)\big)$$

a) determinarne il dominio di definizione e stabilire se è irrotazionale;
b) calcolarne il lavoro lungo il bordo del quadrato centrato nell'origine, con lato di lunghezza 3, orientato in senso antiorario;
c) stabilire se esiste un insieme aperto connesso, contenente il bordo del quadrato, in cui il campo sia conservativo e in tal caso determinarne la famiglia dei potenziali. (3+3+4)

Risposte: Il campo è irrotazionale ed il dominio è $\mathbb{R}^2$ eccetto le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \geq 0$. Il lavoro lungo il bordo del quadrato è nullo. Nella corona circolare di raggio interno $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e raggio esterno $\sqrt{\frac{3}{2}\pi}$, contenente il bordo del quadrato, il campo è conservativo e la famiglia dei potenziali è data da $U(x,y) = -\frac{1}{2}\log|\cos(x^2+y^2)| + C$.

1) È un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, infatti ponendo $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ e $g(y)=\frac{1-y^2}{4y}$, si può scrivere come $y'=f(x)\cdot g(y)$.

Dato che $g(\sqrt{2})\neq 0$ possiamo dividere tutto per $g(y)$ ottenendo $\int \frac{4y}{1-y^2}\,dy=\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \Rightarrow -2\log|1-y^2|=\frac{3}{2}x^{2/3}+C$.

Imponendo il dato iniziale si ricava $0=\frac{3}{2}+C$ da cui $C=-\frac{3}{2}$ e quindi $-2\log|1-y^2|=\frac{3}{2}x^{2/3}-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \log|1-y^2|=\frac{3}{4}(1-x^{2/3}) \Leftrightarrow |1-y^2|=e^{\frac{3}{4}(1-\sqrt[3]{x^2})} \Leftrightarrow$

$y^2-1=e^{\frac{3}{4}(1-\sqrt[3]{x^2})}$ (perché $y>1$ nel dato iniziale) $\Leftrightarrow$

$y=\sqrt{1+e^{\frac{3}{4}(1-\sqrt[3]{x^2})}}$ (perché $y>0$ nel dato iniziale).

2) La curva è chiusa, infatti $\varphi(0)=(1,0)=\varphi(\pi)$ ed è regolare poiché $x'(t)=-2\cos t\,\text{sen}\,t$ e $y'(t)=\cos^2 t-\text{sen}^2 t$ e $x'(t)^2+y'(t)^2=4\cos^2 t\,\text{sen}^2 t+\cos^4 t+\text{sen}^4 t-2\cos^2 t\,\text{sen}^2 t=$

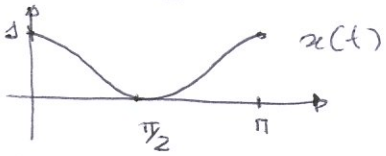
$=\cos^4 t+\text{sen}^4 t+2\cos^2 t\,\text{sen}^2 t=(\cos^2 t+\text{sen}^2 t)^2=1\neq 0\quad \forall t\in[0,\pi]$

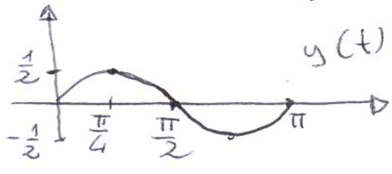
Inoltre è semplice perché se per $t\neq t'$ si ha $\varphi(t)=\varphi(t')$

allora $\begin{cases}\cos^2 t=\cos^2 t'\\ \cos t\,\text{sen}\,t=\cos t'\,\text{sen}\,t'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos t'=\pm\cos t\\ \cos t\,\text{sen}\,t=\pm\cos t\,\text{sen}\,t'\end{cases}$

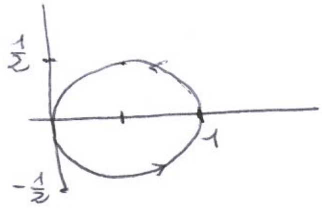
se $\cos t=0$, allora anche $\cos t'=0$ e quindi $t=t'=\frac{\pi}{2}$, assurdo; quindi dividendo la seconda equazione per $\cos t$ otteniamo $\text{sen}\,t=\pm\text{sen}\,t'$, ma $\text{sen}\,t, \text{sen}\,t'\geq 0\ \forall t,t'\in[0,\pi]$, quindi $\text{sen}\,t=\text{sen}\,t' \Rightarrow t=t'$ perché in $[0,\pi]$ la funzione seno è iniettiva. Per disegnare la curva osserviamo che $x(t)\geq 0\ \forall t\in[0,\pi]$ ed è decrescente in $[0,\frac{\pi}{2}]$, crescente in $[\frac{\pi}{2},\pi]$; mentre $y(t)\geq 0$ in $[0,\frac{\pi}{2}]$ e $y(t)\leq 0$ in $[\frac{\pi}{2},\pi]$

ed è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, decrescente in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, crescente in $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$.





Il disegno della curva è:



• Lunghezza della curva: $\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$

• Area delimitata dalla curva: $A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x\,dy - y\,dx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 t \,(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen} t \cos t \,(-2 \cos t \operatorname{sen} t)\, dt =$$

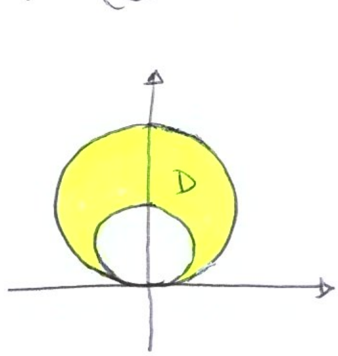
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 t - \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + 2 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 t + \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 t \,(\cancel{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t})\, dt = \frac{1}{4} \left[t + \operatorname{sen} t \cos t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

N.B. Non era richiesto dal testo, tuttavia si può osservare che la curva è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{1}{2}$, infatti $\left(x(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y(t)\right)^2 = \cos^4 t - \cos^2 t + \frac{1}{4}$

$$+ \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t \,(\underbrace{\cancel{\cos^2 t - 1 + \operatorname{sen}^2 t}}_{=0}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

3) Dato che la funzione è pari rispetto a x e il dominio D è simmetrico rispetto all'asse y, possiamo calcolare l'integrale esteso a $D^+ = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}$.



Passando in coordinate polari si ottiene

$$2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\operatorname{sen}\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} \frac{\cancel{\rho} \cos\theta \, e^{\rho}}{\rho^{\cancel{2}}} \cdot \rho \, d\rho = 2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(e^{2\operatorname{sen}\theta} - e^{\operatorname{sen}\theta}\right) d\theta$$

$$= \left[e^{2\operatorname{sen}\theta} - 2e^{\operatorname{sen}\theta}\right]_0^{\pi/2} = e^2 - 2e - 1 + 2 = e^2 - 2e + 1$$

4) a) Il dominio del campo è $\mathbb{R}^2$ eccetto le circonferenze di equazione $x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k \geq 0$ (per $k<0$ il raggio è immaginario). Il campo è irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)} \cdot 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = y \frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)} \cdot 2x.$$

b) Il quadrato centrato nell'origine di lato 3 (cioè di vertici $\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right)$ e $\left(-\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right)$ è contenuto nella corona circolare $C = \{(x,y) : \frac{\pi}{2} < x^2+y^2 < \frac{3}{2}\pi\}$, infatti la massima distanza del bordo del quadrato dall'origine è $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e risulta $\frac{3}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{3}{2}\pi}$ (infatti elevando al quadrato si ha $\frac{9}{\cancel{2}} < \frac{3\pi}{\cancel{2}}$), mentre la minima distanza dall'origine è $\frac{3}{2} > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dato che il campo è irrotazionale, per calcolare il lavoro lungo il bordo del quadrato possiamo scegliere una qualunque curva chiusa contenuta in C, che circondi l'origine. Presa la circonferenza $x^2+y^2=2$, che è contenuta in C, il lavoro vale

$$\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos t \tan(2) \cdot (-\sqrt{2}\sin t) + \sqrt{2}\sin t \cdot \tan(2) \cdot \sqrt{2}\cos t\right) dt = 0$$

(avendo usato la parametrizzazione $x(t)=\sqrt{2}\cos t$, $y(t)=\sqrt{2}\sin t$).

c) Pertanto il campo è conservativo nella corona circolare C e la famiglia dei potenziali è data da

$$U(x,y) = \int x \tan(x^2+y^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot \tan(x^2+y^2)\,dx \overset{(t=x^2+y^2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\frac{1}{2}\log|\cos t| + f(y) =$$

$= -\frac{1}{2}\log|\cos(x^2+y^2)| + f(y)$. Derivando rispetto ad y si trova $f(y) = c$. Quindi $U(x,y) = -\frac{1}{2}\log|\cos(x^2+y^2)| + c$.