Corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Prova scritta di Analisi Matematica (12cfu) del 09.01.2013

COGNOME .... NOME ....

Svolgere i seguenti esercizi trascrivendo il risultato negli appositi spazi su questa facciata e lo svolgimento nelle altre facciate **di questo foglio**, in modo **ordinato e leggibile**.

1) Calcolare, se esiste, il $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sqrt{1-2x} - 2}{\arctan^3 x}$. (5)

Risposta: $-\frac{1}{3}$

2) Calcolare l'integrale $\int_0^1 \arctan(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$ (6)

Risposta: $\frac{\pi}{2} - 1$

3) Studiare, per $\alpha \neq 0$, il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^2 \alpha^n}$. (5)

Risposta: La serie converge per $|\alpha \geq 1$, diverge per $-1 < \alpha < 0$, è indeterminata per $0 < \alpha < 1$.

4) Dopo aver dimostrato che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\arcsin\sqrt{1-z},\ \frac{z}{y},\ \log y - \frac{x}{2\sqrt{z - z^2}} \right)$$

è conservativo nel suo dominio, determinare la famiglia dei potenziali. (7)

Risposta: $U(x, y, z) = z \log y + x \arcsin\sqrt{1-z}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times (0, 1)$.

5) Calcolare il volume del solido

$$E := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\}$$

(7)

Risposta: $\frac{2}{3}\pi$.

1) È un'equazione a variabili separabili del primo ordine. Separando le variabili si ottiene

$$\int \frac{y}{(1+y^2)^2}\,dy = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \iff \frac{1}{2}\int \frac{2y}{(1+y^2)^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+y^2)^2}\,dy \iff -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + C$$

Imponendo il dato iniziale $y(0)=1$ si ottiene

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + C \iff C = \frac{1}{4} \quad \text{quindi}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \iff \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \iff$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} \iff 1+y^2 = \frac{2(1+x^2)}{1-x^2} \iff$$

$$y = \sqrt{\frac{2(1+x^2)}{1-x^2} - 1} = \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}\,,$$ definita in $(-1,1)$.

2) La funzione è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. $\nabla f = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} \cancel{2}y + \dfrac{\cancel{2}x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \cancel{2}x + \dfrac{\cancel{2}y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+x^2y+y^3+x = 0 \\ x+x^3+xy^2+y = 0 \end{cases} \iff$$

$$(\mathrm{I}^a - \mathrm{II}^a) \begin{cases} y^3-x^3+xy(x-y) = 0 \\ x+x^3+xy^2+y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-x)(y^2+\cancel{xy}+x^2-\cancel{xy}) = 0 \\ x+x^3+xy^2+y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ x^3+2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x(\cancel{x^2+2}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$ cioè l'origine è l'unico punto stazionario. Osserviamo che $f(x,0) = \log(1+x^2)$ presenta un minimo per $x=0$, mentre $f(x,-x) = \log(1+2x^2) - 2x^2$ presenta un massimo per $x=0$, infatti $\frac{d}{dx}\left(\log(1+2x^2)-2x^2\right) =$

$$= \frac{4x}{1+2x^2} - 4x = 4x\left(\frac{-2x^2}{1+2x^2}\right) > 0 \iff x<0$$ ~~mgi~~.

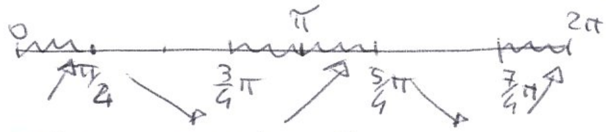
Quindi l'origine è un punto sella.

Nel cerchio chiuso la funzione ammette massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass, che necessariamente si trovano nel bordo. Ponendo

$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 2\cos t \operatorname{sen} t + \log 2$, si ha

$g'(t) = 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) \geq 0 \iff \cos^2 t \geq \operatorname{sen}^2 t \iff \tan^2 t \leq 1$

$\iff -1 \leq \tan t \leq 1 \iff 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq t \leq 2\pi$



Essendo $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5}{4}) = \log 2 + 1$ e $g(\frac{3}{4}\pi) = g(\frac{7}{4}\pi) = \log 2 - 1$, il massimo assoluto nel cerchio è $\log 2 + 1$, mentre il minimo assoluto è $\log 2 - 1$.

3) Il campo è definito per $y > 0$ e $0 < z < 1$, cioè $D = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times (0,1)$ che è un insieme semplicemente connesso. Essendo $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$; $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-z)}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-z}}$ $= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z-z^2}} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{1}{y} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$, il campo è conservativo. Si ha

$U(x,y,z) = \int \frac{z}{y}\, dy = z \log y + f(x,z)$, quindi

$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1(x,y,z) \iff \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-z} \iff f(x,z) =$

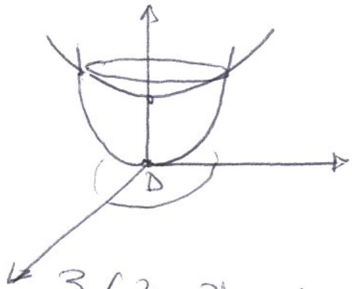
$= x \operatorname{arcsen}\sqrt{1-z} + g(z)$; quindi $U(x,y,z) = z \log y + x \operatorname{arcsen}\sqrt{1-z}$ $+ g(z)$. Infine, si ha $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3(x,y,z) \iff \cancel{\log y} +$

$+ x \frac{1}{\sqrt{1-(1-z)}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-z}} + g'(z) = \cancel{\log y} - \frac{x}{2\sqrt{z-z^2}} \iff$

$-\cancel{\frac{x}{\sqrt{z-z^2}}} + g'(z) = -\cancel{\frac{x}{2\sqrt{z-z^2}}} \iff g'(z) = 0 \iff g(z) = C.$

Pertanto $U(x,y,z) = z \log y + x \operatorname{arcsen}\sqrt{1-z} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

4) Il solido è un dominio normale rispetto al piano (x, y).



Determiniamo l'intersezione dei due paraboloidi: $x^2+y^2 = 1+\frac{1}{4}(x^2+y^2) \iff \frac{3}{4}(x^2+y^2)=1$

$\iff x^2+y^2=\frac{4}{3}$, quindi $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le \frac{4}{3}\}$, cioè $\rho\le\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Vol } E = \iiint_E 1\, dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{1+\frac{1}{4}(x^2+y^2)} 1\, dz = \iint_D \left(1+\frac{1}{4}(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\right)$$

$$= \iint_D \left[1-\frac{3}{4}(x^2+y^2)\right] dx\, dy.$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{-} \left(1-\frac{3}{4}\rho^2\right)\rho\, d\rho = 2\pi\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\rho-\frac{3}{4}\rho^3\right)d\rho = 2\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{3}{16}\rho^4\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}}{9}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$