Esercitazione finale: Analisi 2 (BIO) - 03/06/2013

Risolvere i seguenti esercizi, motivando i passaggi effettuati.

1) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

è continua, derivabile (calcolare le derivate direzionali in ogni direzione) e differenziabile in $(0,0)$.

2) a- Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine attorno al punto (1,1) per

$$f(x,y) = (x+1)(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2;$$

successivamente, determinare la natura dei punti critici (liberi) di $f(x,y)$.

b- Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y)$ sul compatto che ha per frontiera il trapezio isoscele D avente per basi $[-2,2] \times \{0\}$ e $[-1,1] \times \{2\}$.

3) a- Data la curva γ con parametrizzazione

$$\varphi(t) = (\sin^2 t - \cos^2 t, t^3 - (\pi+4)t^2 + 4\pi t), \quad t \in [0,\pi],$$

dire se si tratta di una curva regolare, semplice, chiusa.

b- Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = x\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, dire se si tratta di un campo conservativo e, in caso affermativo, esibirne un potenziale. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

c- Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\overline{\gamma}$ definita allo stesso modo di γ, ma per $t \in [0,\pi/4]$.

d- Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ (inteso come campo $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con terza componente nulla, ovvero $(x\sqrt{1-x^2}, y, 0)$) attraverso la porzione del paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa tra i piani $\{z=0\}$ e $\{z=1\}$.

4) Calcolare il volume della regione di spazio

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1\}.$$

5) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x\sin x + 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

1) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\operatorname{sen} xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

• CONTINUITÀ

Siccome le maggiorazioni dirette in coordinate polari non portano a nessun risultato, proviamo a calcolare f sulle rette

▫ $y = mx \Rightarrow f(x, mx) = \dfrac{\operatorname{sen} mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{\operatorname{sen} mx^2}{(1+m^2)x^2}$ $(m \in \mathbb{R})$
$(x \neq 0)$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx^2}{(m^2+1)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx^2}{(m^2+1)\frac{mx^2}{m}} = \frac{m}{m^2+1} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} mx^2}{mx^2}}_{1 \text{ (limite notevole)}} = \frac{m}{m^2+1}$$

Poiché il limite trovato dipende da m, f NON è continua in $(0,0)$.

• DIFFERENZIABILITÀ

Siccome f non è continua in $(0,0)$, non è ivi differenziabile (poiché differenziabilità $\Rightarrow$ continuità).

• DERIVABILITÀ

Fisso una direzione (h,k) : $h^2+k^2=1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(h,k)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} t^2hk}{t^2(h^2+k^2)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} hkt^2}{hkt^2} \cdot \frac{hk}{h^2+k^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{hk \, \frac{\operatorname{sen} hkt^2}{hkt^2}}{t}$$

Se $(h,k) = (1,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$(h,k) = (0,1) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

ma nelle altre direzioni le derivate direzionali non esistono in $(0,0)$.

2) $f(x,y) = (x+1)(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2$. (Taylor: vedi dopo)

a- $\nabla f(x,y) = \left((x-1)^2 + 2(x-1)(x+1),\ 2(y-1)\right) =$

$= \left(x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2,\ 2(y-1)\right)$

$= \left(3x^2 - 2x - 1,\ 2y - 2\right)$

(ricordo che $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

Punti critici: $\nabla f = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \\ y = 1 \end{cases}$$

Punti critici: $P_1(1,1)$ $P_2\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

Per determinare la natura di P_1, P_2: calcolo $H_f(x,y)$ nei punti P_1, P_2

$$\left(H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}\right)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In P_1: $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: è definita positiva $\Rightarrow$ P_1 MINIMO RELATIVO

In P_2: $H_f\left(-\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: ha un autovalore > 0 e un autovalore $< 0 \Rightarrow$ P_2 <u>SELLA</u>.

Ho $f(1,1) = -2$, $f\left(-\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{22}{27}$

TAYLOR: $f(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1,y-1) + \frac{1}{2}\left[H_f(1,1)\cdot(x-1,y-1)\right]\cdot(x-1,y-1) + o\left(\|(x-1,y-1)\|^2\right)$

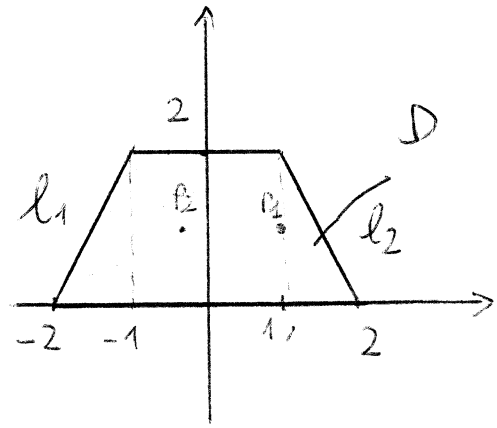
Siccome $f(1,1) = -2$, $\nabla f(1,1) = (0,0)$, $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$f(x,y) = -2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o\left(\|(x-1, y-1)\|^2\right) =$$

$$= -2 + 2(x-1)^2 + (y-1)^2 + o\left(\|(x-1, y-1)\|^2\right)$$

(sviluppo di Taylor)

b-



Considero le restrizioni di f al bordo di D

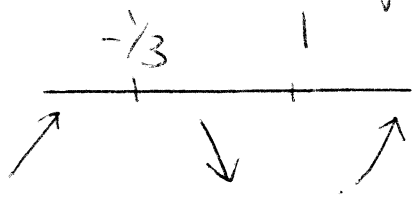
① Base maggiore B_1

$(y=0,\ x\in[-2,2])$

Siccome $y=0$, ho $g_1(x)=f|_{B_1} = f(x,0) = (x+1)(x-1)^2-1$ $(x\in[-2,2])$

$= x^3-x^2-x+1-1 = x^3-x^2-x.$

$g_1'(x) = 3x^2-2x-1 \Rightarrow g_1'=0$ per $x=1$ o $x=-\frac{1}{3}$



PUNTI INTERNI al segmento B_1!

$(-1/3,0)$ è massimo locale per $f|_{B_1}$ $\Rightarrow g_1(-1/3) = -\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3} = \frac{5}{27}$

$(1,0)$ è minimo locale per $f|_{B_1}$ $\Rightarrow g_1(1) = -1$

Devo ora considerare anche i valori agli estremi del segmento:

$g_1(-2) = -8-4+2 = -10$

$g_1(2) = 8-4-2 = 2$

Siccome $2 > \frac{5}{27}$ $\Rightarrow$ $\max_{B_1} f$ è raggiunto in $(+2,0)$ e vale 2

$-10 < -1$ $\Rightarrow$ $\min_{B_1} f$ " in $(-2,0)$ e vale -10

② Base minore B_2

$(y=2,\ x\in[-1,1])$

Analogamente: $g_2(x) := f|_{B_2} = (x+1)(x-1)^2 - 1.$

Ripeto lo studio fatto in precedenza:

$(-\frac{1}{3},2)$ è massimo locale per $f|_{B_2}$ e $g_2(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$

$(1,2)$ è un estremo del segmento (ragiono separatamente, osservando però che dallo studio della derivata è un candidato minimo)

$\Rightarrow$ ho $g_2(1) = -1$

Nell'altro estremo ho $g_2(-1) = -1$

Perciò $\max_{B_2} f$ è raggiunto in $(-\frac{1}{3},2)$ e vale $\frac{5}{27}$

$\min_{B_2} f$ è raggiunto in $(-1,2)$ e in $(1,2)$ e vale -1

③ Lato l_1: retta per $(-2,0)$, $(-1,2)$ $\Rightarrow$ $y = 2x+4$

$\Rightarrow$ Definisco $g_3(x) := f(x, 2x+4)$ $x\in[-2,-1]$ (cioè $f|_{l_1}$)

$$= (x+1)(x-1)^2 + (2x+3)^2 - 2 =$$
$$= x^3 - x^2 - x + 1 + 4x^2 + 9 + 12x - 2 =$$
$$= x^3 + 3x^2 + 11x + 8.$$

$g_3'(x) = 3x^2 + 6x + 11$ $\quad g_3'(x) = 0$ se $x = \frac{-6\pm\sqrt{36-132}}{6}$ <0!

$\Rightarrow$ la derivata non si annulla mai!

Noto che g_3' è sempre >0 per $x\in[-2,-1]$ $\Rightarrow$ la funzione g_3 sarà minima per $x=-2$ e massima per $x=-1$

Perciò $\max_{l_1} f$ è raggiunto in $(-1,2)$ e vale $2(-1)+4 = -1$

$\min_{l_1} f$ è raggiunto in $(-2,0)$ e vale -10

④ Lato l_2: retta per $(1,2),(2,0) \Rightarrow y = -2x+4$

Definisco $g_4(x) := f(x, -2x+4)$
$x \in [1,2]$

$$= (x+1)(x-1)^2 + (-2x+3)^2 - 2 =$$
$$= +x^3 - x^2 - x + 1 + 4x^2 + 9 - 12x - 2 =$$
$$= x^3 + 3x^2 - 13x + 8$$

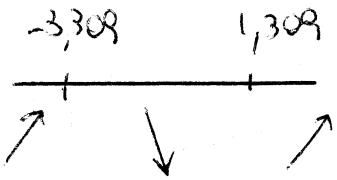
$g_4'(x) = 3x^2 + 6x - 13$ $\qquad g_4' = 0$ se $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+156}}{6} =$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{192}}{6} =$$

$$= \frac{-6 \pm 8\sqrt{3}}{6} = \begin{cases} \sim 1{,}309 \\ \sim -3{,}309 \end{cases}$$

$-3{,}309 \notin [1,2]$

$1{,}309 \in [1,2]$
(unico punto critico interno)



Calcolo $g_4\left(\dfrac{-6+8\sqrt{3}}{6}\right) \sim g_4(1{,}309) \cong 2{,}242 + 5{,}140 - 17{,}017 + 8$
$\cong -1{,}635$

Negli estremi del segmento f è già stata calcolata: in $(1,2)$ vale -1 e in $(2,0)$ vale 2

Perciò $\max_{l_2} f$ è raggiunto in $(2,0)$ e vale 2

$\min_{l_2} f$ è raggiunto in $\sim(1{,}309, \underbrace{1{,}372}_{-2\cdot 1{,}309+4})$ e vale $\sim -1{,}635$

Ora confronto tutti i valori minimi / massimi di f

VALORI MINIMI: $\left\{ \begin{matrix} -2, & -10, & -1, & -1{,}635 \\ (1,1) & (-2,0) & \begin{matrix}(-1,2)\\(1,2)\end{matrix} & (1{,}309, 1{,}372) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO SU D: $(-2,0)$
VALORE MINIMO -10

VALORI MASSIMI: $\left\{ \begin{matrix} 2, & \frac{5}{27}, & -1 \\ (2,0) & (-\frac{1}{3}, 2) & (-1,2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO SU D: $(2,0)$
VALORE MASSIMO 2

3) $\varphi(t) = (\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t,\ t^3 - (\pi+4)t^2 + 4\pi t),\quad t \in [0,\pi] =: I$ (3)

a- Curva regolare?

$\varphi(t) = (-\cos 2t,\ t(t-4)(t-\pi))$ componenti $C^1(I)$

Si ha $\varphi'(t) = (2\operatorname{sen} 2t,\ 3t^2 - 2(\pi+4)t + 4\pi)$

La prima componente si annulla, in I, nei punti $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$.

Calcolando la seconda componente in tali punti si ha

$\varphi_2'(t_1) = \varphi_2'(0) = 4\pi \neq 0$

$\varphi_2'(t_2) = \varphi_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{\pi^2}{4} - 2(\pi+4)\frac{\pi}{2} + 4\pi = -\frac{\pi^2}{4} \neq 0$

$\varphi_2'(t_3) = \varphi_2'(\pi) = 3\pi^2 - 2(\pi+4)\pi + 4\pi = \pi^2 - 4\pi \neq 0$

$\Rightarrow$ φ' non si annulla mai in $[0,\pi]$ $\Rightarrow$ la curva assegnata è regolare.

b- Curva semplice?

Siano $t_1, t_2 \in [0,\pi]$ tali che $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2t_1 = \cos 2t_2 \\ t_1^3 - (\pi+4)t_1^2 + 4\pi t_1 = t_2^3 - (\pi+4)t_2^2 + 4\pi t_2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione: $2t_1 = 2t_2 + 2k\pi$ o $2t_1 = -2t_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $t_1 = t_2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ • o $t_1 = t_2$ o t_1 e t_2 distano almeno π: poiché $t_1, t_2 \in I$ $\Rightarrow$ $t_1 = t_2$ o $t_1 = 0$ e $t_2 = \pi$ (gli unici punti che distano π in I sono 0 e π).

o

$t_1 = -t_2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ • $t_1 = \pi - t_2$ (poiché $t_1, t_2 \in [0,\pi]$). Allora sostituisco nella seconda eq.:

$(\pi - t_2)^3 - (\pi+4)(\pi - t_2)^2 + 4\pi(\pi - t_2) = t_2^3 - (\pi+4)t_2^2 + 4\pi t_2$

(o $t_1 = t_2 = 0$ o $t_1 = t_2 = \pi$ $\rightarrow$ ok)

cioè

$\cancel{\pi^3} + 3t_2^2\pi - 3t_2\pi^2 - t_2^3 - \cancel{\pi^3} - \pi t_2^2 + 2\pi^2 t_2 - \cancel{4\pi^2} - \cancel{4t_2^2} + \cancel{8\pi t_2} + \cancel{4\pi^2} - \cancel{4\pi t_2}$

$= t_2^3 - (\pi + \cancel{4})t_2^2 + \cancel{4\pi t_2}$

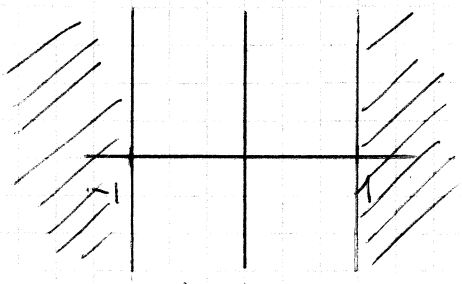
$2t_2^3 - 3\pi t_2^2 - \pi^2 t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0$ o $2t_2^2 - 3\pi t_2 - \pi^2 = 0 \Rightarrow$

$t_2 = \frac{3\pi \pm \sqrt{17\pi^2}}{4} \Rightarrow t_2 < 0$ o $t_2 > \pi \Rightarrow$ ok

$\rightarrow$ $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$ $\Rightarrow$ $t_1 = t_2$ o $t_1 = 0, t_2 = \pi$ $\Rightarrow$ φ è semplice

c- Curva chiusa? $\varphi(0) = (-1, 0) = \varphi(\pi)$ quindi la curva è chiusa.

b- $\underline{F}(x,y) = x\sqrt{1-x^2}\,\underline{i} + y\,\underline{j}$ definito per $|x| \leq 1$, $\forall y$



↳ D dominio del campo, semplicemente connesso

Al fine di stabilire se $\underline{F}$ conservativo, siccome D è semplicemente connesso, controllo se $\underline{F}$ è irrotazionale.

Si ha $F_1(x,y) = x\sqrt{1-x^2}$, $F_2(x,y) = y$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow \underline{F} \text{ è irrotazionale in } D \Rightarrow \underline{F} \text{ conservativo.}$$

Per determinare un potenziale U osservo che $U: D \to \mathbb{R}$ deve soddisfare

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= x\sqrt{1-x^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= y \end{aligned}\right\}$$

Dalla prima ottengo $\hat{U}(x,y) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + h(y)$; imponendo la validità della seconda ottengo

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = h'(y) \overset{\text{DEVE}}{=} y \Rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}$$

Quindi un potenziale U di $\underline{F}$ è dato da

$$U(x,y) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \frac{y^2}{2}.$$

Siccome γ è chiusa e $\underline{F}$ è conservativo, $\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{\varphi} = 0$.

c- Per calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ, sfrutto il potenziale trovato al punto precedente: se $\hat{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrizza γ, si ha

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\hat{\underline{\varphi}} = U(\hat{\varphi}(b)) - U(\hat{\varphi}(a))$$

Poiché $\hat{\varphi}(0)=(-1,0)$, $\hat{\varphi}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi^3}{64}-(\pi+4)\frac{\pi^2}{16}+\cancel{4}\pi\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)=$

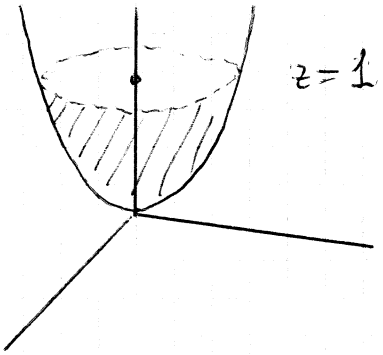
$$=\left(0, \frac{48\pi^2-3\pi^3}{64}\right),$$

otteniamo

$$\int_{\hat{\gamma}} \underline{F}\cdot d\underline{\hat{\varphi}} = U\left(0, \frac{48\pi^2-3\pi^3}{64}\right) - U(-1,0) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{48\pi^2-3\pi^3}{64}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{48\pi^2-3\pi^3}{64}\right)^2 \approx 17{,}694.$$

d- Parametrizzo la porzione richiesta di paraboloide:



È conveniente usare le coordinate cartesiane

$$\underline{r}: \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=u^2+v^2 \end{cases}, \quad \text{con } 0\le z\le 1 \Rightarrow 0\le u^2+v^2\le 1 \Rightarrow$$

$$\underline{r}: D\to\mathbb{R}^3 \text{ con } D=\{(u,v)\,/\,u^2+v^2\le 1\}.$$

Si ha $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}=(1,0,2u)$ $\quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}=(0,1,2v)$

cosicché $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}=(-2u,-2v,1)$ (non essendoci richieste specifiche possiamo scegliere un'orientazione qualunque per calcolare il flusso)

e

$$\Phi=\iint_S \underline{F}\cdot\underline{\nu}\,dS = \iint_D \underline{F}(\underline{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)du\,dv =$$

$$= \iint_D \left(u\sqrt{1-u^2},\, v,\, 0\right)\cdot\left(-2u,-2v,\,1\right)\, du\,dv =$$

$$= \iint_D -2u^2\sqrt{1-u^2} - 2v^2 \, du\,dv = \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} -2u^2\sqrt{1-u^2} - 2v^2 \, du\,dv$$

Poiché il dominio di integrazione D è simmetrico in v e la funzione integranda è pure simmetrica in v (pari), si ha

$$\Phi = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-u^2}} -2u^2\sqrt{1-u^2} - 2v^2\, dv\right) du = 2\int_{-1}^{1}\left[\left(-2u^2\sqrt{1-u^2}\, v\right)\Big|_{v=0}^{v=\sqrt{1-u^2}} + \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}v^3\Big|_0^{\sqrt{1-u^2}}\right] du = 2\int_{-1}^{1}\left[\left(-2u^2(1-u^2)\right) - \frac{2}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right] du$$

Si ha $\quad 2\int_{-1}^{1}\left(-2u^2 + 2u^4\right) du = 2\left(\frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2\cdot 8}{15} = -\frac{16}{15}$

Inoltre $J := \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{3/2}\, du = 2\int_0^1 (1-u^2)^{3/2}\, du$ (per ragioni di simmetria)

Pongo $u = \cos t$, cosicché $t = \arccos u$, $du = -\operatorname{sen} t\, dt$ e si ha

$$J = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}(-\operatorname{sen} t)\, dt = +2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}\operatorname{sen} t\, dt =$$

$$= +2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^4 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(1-\cos 2t)}{2}\right]^2 dt = \frac{2}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos^2 2t - 2\cos 2t\right) dt =$$

$(\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t\right]_0^{\pi/2} - 0 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

Segue

$$\Phi = -\frac{16}{15} - \frac{\cancel{4}^{1}\cancel{3}}{\cancel{3}\,\cancel{8}_{2}}\pi = -\frac{16}{15} - \frac{\pi}{2}.$$

4) Calcolare il volume di

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+z^2 \leq 1,\ z^2+y^2 \leq 1 \}$$

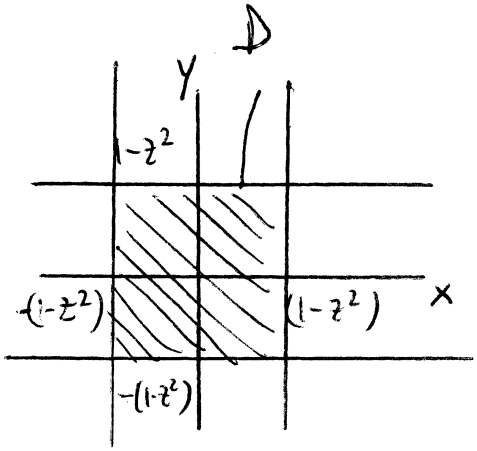
Comodo: integrare per strati

Fisso z

$\Rightarrow$ $x^2 \leq 1-z^2$ $\qquad$ $\Rightarrow$ deve essere $1-z^2 \geq 0$

$y^2 \leq 1-z^2$ $\qquad$ $\Rightarrow$ $-1 \leq z \leq 1$.

Inoltre



$$-\sqrt{(1-z^2)} \leq x \leq \sqrt{(1-z^2)}$$

$$-\sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{(1-z^2)}$$

Perciò

$$\iiint_E dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_D dx\,dy \right) dz \overset{\text{per simmetria}}{=} 4 \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy =$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} (1-z^2)\,dz = 8 - 4\frac{z^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 8 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

5.) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{sen} x + 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

$\boxed{1}$ <u>Eqz. omogenea</u>

Polinomio car: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ soluzioni reali distinte

Integrale generale: pose $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, si ha

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad \text{integrale generale dell'omogenea}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ <u>Eqz. completa</u>

Uso il metodo di sovrapposizione e cerco prima soluzioni di

- $y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{sen} x$ $\qquad x \operatorname{sen} x = e^{px}\left(h(x)\cos qx + k(x)\operatorname{sen} qx\right)$

$$\rightarrow \quad p = 0, \; h \equiv 0, \; k(x) = x, \; q = 1$$

Poiché $p \pm iq = \pm i$ non è radice del polinomio caratteristico, cerco soluzioni della forma $\bar{y}(x) = h^*(x)\cos x + k^*(x)\operatorname{sen} x$, con h^*, k^* di grado 1.

Posti $h^*(x) = A+Bx$, $k^*(x) = C+Dx$, ho $\bar{y}(x) = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\operatorname{sen} x$

$$\bar{y}'(x) = (B+C+Dx)\cos x + (D-A-Bx)\operatorname{sen} x$$
$$\bar{y}''(x) = (-A+2D-Bx)\cos x + (-C-2B-Dx)\operatorname{sen} x$$

$$\bar{y}''-3\bar{y}'+2\bar{y} = (-A+2D-Bx-3B-3C-3Dx+2A+2Bx)\cos x + (-C-2B-Dx-3D+3A+3Bx+2C+2Dx)\operatorname{sen} x$$

$$= \left[(A-3B-3C+2D)+(B-3D)x\right]\cos x + \left[(3A-2B+C-3D)+(D+3B)x\right]\operatorname{sen} x \underset{\text{DEVE}}{=} x\operatorname{sen} x$$

Perciò

$$\begin{cases} A-3B-3C+2D=0 \\ B-3D=0 \\ 3A-2B+C-3D=0 \\ D+3B=1 \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla quarta deduco $D=\frac{1}{10}$, $B=\frac{3}{10}$

Quindi, sostituendo: $A=\frac{17}{50}$, $C=-\frac{3}{25}$.

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(x) = \left(\frac{17}{50}+\frac{3}{10}x\right)\cos x + \left(-\frac{3}{25}+\frac{1}{10}x\right)\operatorname{sen} x$$

$y''-3y'+2y=1$ si vede subito che $\bar{\bar{y}}(x) \equiv \frac{1}{2}$ è soluzione.

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + \left(\frac{17}{50}+\frac{3}{10}x\right)\cos x + \left(-\frac{3}{25}+\frac{1}{10}x\right)\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)=1 &\Rightarrow c_1+c_2+\frac{17}{50}+\frac{1}{2}=1 \\ y'(0)=0 &\Rightarrow c_1+2c_2+\frac{3}{10}-\frac{3}{25}=0 \end{aligned}\right\} \quad c_1=\frac{1}{2},\ c_2=-\frac{17}{50}$$

$\Rightarrow$ RISPOSTA ALL'ES: $y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{17}{50}e^{2x} + \left(\frac{17}{50}+\frac{3}{10}x\right)\cos x + \left(-\frac{3}{25}+\frac{1}{10}x\right)\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$